

Г.М. Жумабаева<sup>1</sup>, М.К. Жуkenов<sup>1</sup>, С.К. Тлеуkenов<sup>2</sup>, Т.С. Досанов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Павлодарский государственный университет им. С.Торайгырова;  
<sup>2</sup>Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана  
 (E-mail: gauhar-202@mail.ru)

## К вопросу отражения электромагнитной ТЕ-волны от поверхности магнитоэлектрического кристалла гексагональной сингонии классов $\underline{622}$ , $6mm$ , $\underline{6m2}$ , $6mm$

В работе на основе метода матрицанта решена задача отражения электромагнитной ТЕ-волны от поверхности магнитоэлектрического кристалла гексагональной сингонии классов  $\underline{622}$ ,  $6mm$ ,  $\underline{6m2}$ ,  $6mm$ . Рассмотрена замкнутая система уравнений, содержащая уравнения Максвелла в отсутствие свободных зарядов и токов и определяющая соотношения для магнитоэлектрического кристалла. Получена система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая распространение электромагнитных волн. Построена структура матриц коэффициентов. Получен «закон преломления» электромагнитной ТЕ-волны. Проведен численный расчет отражательной и пропускательной способностей.

*Ключевые слова:* магнитоэлектрический эффект, метод матрицанта, отражательная и пропускательная способности, магнитоэлектрическая среда, изотропная среда, гексагональная сингония, волновой вектор.

В данной работе впервые на основе метода матрицанта решена задача отражения электромагнитной ТЕ-волны от поверхности магнитоэлектрического кристалла гексагональной сингонии классов  $\underline{622}$ ,  $6mm$ ,  $\underline{6m2}$ ,  $6mm$ .

Теоретическое исследование вопроса отражения электромагнитных волн от поверхности магнитоэлектрических сред основано на получении и дальнейшем анализе решений совместной системы уравнений: системы уравнений Максвелла и определяющих соотношений для магнитоэлектрических сред с использованием граничных условий.

Система уравнений Максвелла в отсутствие свободных зарядов и токов:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (1)$$

где  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  — напряженности электрического и магнитного полей соответственно;  $\vec{B}$  и  $\vec{D}$  — индукции магнитного и электрического полей.

Определяющие соотношения для сред с магнитоэлектрическим эффектом [1]:

$$\begin{cases} D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} E_j + \alpha_{ij} H_j \\ B_i = \mu_0 \mu_{ij} H_j + \alpha_{ij} E_j \end{cases}, \quad (2)$$

где  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  — электрическая и магнитная постоянные;  $\varepsilon_{ij}$  — компоненты тензора диэлектрической проницаемости;  $\mu_{ij}$  — компоненты тензора магнитной проницаемости;  $\alpha_{ij}$  — компоненты тензора магнитоэлектрических восприимчивостей [1].

Совместим декартову систему координат с кристаллографической системой координат. Тогда, используя метод разделения переменных, т.е. представления решений системы (1)–(2) в виде

$$f(x, y, z, t) = f(z) \exp[i(\omega t - mx - ny)] \quad (3)$$

в случае магнитоэлектрического кристалла гексагональной сингонии классов  $\underline{622}$ ,  $6mm$ ,  $\underline{6m2}$ ,  $6mm$ , получим следующую систему уравнений [2]:

$$\begin{cases} \frac{dE_y}{dz} = i\omega \left( \mu_0 \mu_1 - \frac{n^2}{\omega^2 \epsilon_0 \epsilon_3} \right) H_x + \left( \frac{imn}{\omega \epsilon_0 \epsilon_3} \right) H_y - i\omega \alpha_{12} E_y \\ \frac{dH_x}{dz} = i\omega \left( \epsilon_0 \epsilon_2 - \frac{m^2}{\omega^2 \mu_0 \mu_3} \right) E_y + \left( \frac{imn}{\omega \mu_0 \mu_3} \right) E_x - i\omega \alpha_{12} H_x \\ \frac{dH_y}{dz} = - \left( \frac{imn}{\omega \mu_0 \mu_3} \right) E_y - i\omega \left( \epsilon_0 \epsilon_1 - \frac{n^2}{\omega^2 \mu_0 \mu_3} \right) E_x - i\omega \alpha_{12} H_y \\ \frac{dE_x}{dz} = - \left( \frac{imn}{\omega \epsilon_0 \epsilon_3} \right) H_x - i\omega \left( \mu_0 \mu_2 - \frac{m^2}{\omega^2 \epsilon_0 \epsilon_3} \right) H_y - i\omega \alpha_{12} E_x \\ E_z = - \frac{m}{\omega \epsilon_0 \epsilon_3} H_y + \frac{n}{\omega \epsilon_0 \epsilon_3} H_x; H_z = \frac{m}{\omega \mu_0 \mu_3} E_y - \frac{n}{\omega \mu_0 \mu_3} E_x \end{cases} \quad (4)$$

Здесь  $m$  и  $n$  —  $x$ -вая и  $y$ -вая составляющие волнового вектора.

Систему (4) можно записать в матричном виде

$$\frac{d\vec{w}}{dz} = \hat{B}\vec{w}, \quad (5)$$

где  $\vec{w} = (E_y, H_x, H_y, E_x)^t$ ;  $\hat{B}$  — матрица коэффициентов.

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 \\ b_{21} & b_{11} & 0 & b_{24} \\ -b_{24} & 0 & b_{11} & b_{34} \\ 0 & -b_{13} & b_{43} & b_{11} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Полагая  $n=0$ , т.е. для случая распространения электромагнитных волн вдоль плоскости  $xOz$ , матрица коэффициентов (6) разбивается на две матрицы второго порядка. Элементы матрицы коэффициентов будут равны:

$$\begin{aligned} b_{11} &= -i\omega \alpha_{12}; \quad b_{12} = i\omega \mu_0 \mu_1; \quad b_{21} = i\omega \left( \epsilon_0 \epsilon_2 - \frac{m^2}{\omega^2 \mu_0 \mu_3} \right); \\ b_{34} &= -i\omega \epsilon_0 \epsilon_1; \quad b_{43} = -i\omega \left( \mu_0 \mu_2 - \frac{m^2}{\omega^2 \epsilon_0 \epsilon_3} \right). \end{aligned}$$

Согласно методу матрицанта  $z$ -вая компонента волнового вектора электромагнитной ТЕ-волны [3]:

$$k_z^2 = -b_{11}^2 - b_{12} b_{21} \pm 2\sqrt{b_{11}^2 b_{12} b_{21}}. \quad (7)$$

Из (4) для электромагнитной ТЕ-волны получим:

$$\begin{cases} \frac{dE_y}{dz} = i\omega \cdot \mu_1 H_x - i\omega \cdot \alpha_{12} E_y; \\ \frac{dH_x}{dz} = i\omega \cdot \left( \epsilon_1 - \frac{m^2}{\omega^2 \mu_3} \right) E_y - i\omega \cdot \alpha_{12} H_x. \end{cases} \quad (8)$$

$$H_z = \frac{m}{\omega \mu_0 \mu_3} E_y \quad (9)$$

Здесь и далее для краткости ввели обозначения:  $\mu_i = \mu_0 \mu_i$ ,  $\epsilon_i = \epsilon_0 \epsilon_i$

Пусть на границу раздела изотропной среды и магнитоэлектрической среды гексагональной сингонии классов  $622$ ,  $6mm$ ,  $6m2$ ,  $6mm$  падает электромагнитная ТЕ-волна (рис. 1).

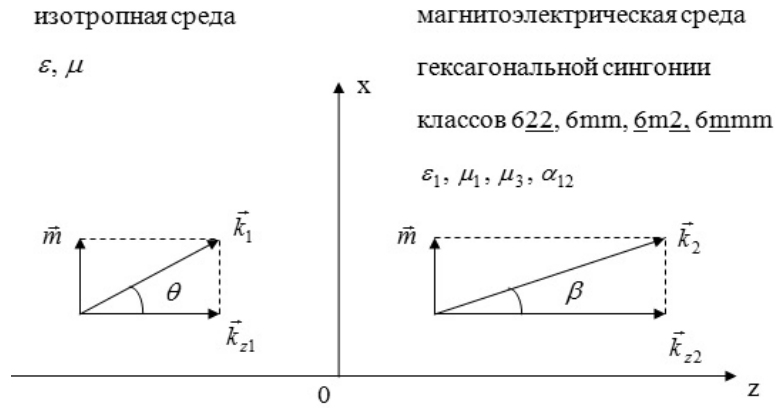


Рисунок 1. Граница раздела сред

Матрица коэффициентов и ее элементы для первой (изотропной) среды:

$$\hat{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где  $a_{12} = i\omega\mu$ ;  $a_{21} = i\omega\varepsilon \cdot \cos^2 \theta$ .

Матрица коэффициентов и ее элементы для второй (магнитоэлектрической среды гексагональной сингонии классов  $\underline{622}$ ,  $6mm$ ,  $\underline{6m2}$ ,  $6mmm$ ) среды:

$$\hat{B}_2 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{11} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где  $b_{11} = -i\omega\alpha_{12}$ ;  $b_{12} = i\omega\mu_1$ ;  $b_{21} = i\omega \left( \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon\mu \cdot \sin^2 \theta}{\mu_3} \right)$ .

Здесь мы воспользовались тем, что

$$k_1 = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}, \quad m = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \sin \theta, \quad k_{z1} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \cdot \cos \theta. \quad (12)$$

Используя (7) и (13) для  $z$ -вой компоненты волнового вектора  $k_{z2}$ , получим:

$$k_{z2} = \omega \left( \alpha_{12} \pm \sqrt{\mu_1 \left( \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon\mu \cdot \sin^2 \theta}{\mu_3} \right)} \right). \quad (13)$$

Тогда «закон преломления» электромагнитной ТЕ-волны на границе раздела изотропной среды и магнитоэлектрического кристалла гексагональной сингонии классов  $\underline{622}$ ,  $6mm$ ,  $\underline{6m2}$ ,  $6mmm$ :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{k_{z1} \cdot \operatorname{tg} \theta}{k_{z2}}. \quad (14)$$

В рамках метода матрицанта поле падающей, отраженной и прошедшей волн представляется в виде [4]

$$\begin{pmatrix} E_y \\ H_x \end{pmatrix} = \hat{T}_1^+ \bar{w}_a, \quad \begin{pmatrix} E_r \\ H_r \end{pmatrix} = \hat{T}_1^- \hat{G} \bar{w}_a, \quad \begin{pmatrix} E_t \\ H_t \end{pmatrix} = \hat{T}_2^+ (\hat{G} + \hat{E}) \bar{w}_a; \quad (15)$$

$$\bar{w}_a = (E_0, H_0)^t; \quad (16)$$

$$\hat{T}_1^\pm = \frac{1}{2} (\hat{E} \pm \frac{i\hat{B}_1}{k_{z1}}) \exp(\mp i k_{z1} z), \quad \hat{T}_2^+ = \frac{1}{2} (\hat{E} + \frac{i\hat{B}_2}{k_{z2}}) \exp(-i k_{z2} z); \quad (17)$$

$$\hat{G} = (\hat{T}_2^+|_{z=0} - \hat{T}_1^-|_{z=0})^{-1} (\hat{T}_1^+|_{z=0} - \hat{T}_2^+|_{z=0}). \quad (18)$$

Здесь  $E_0, H_0$  — постоянные определяющие амплитуды падающих волн.

Из (10)–(11) и (18) получим:

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где

$$g_{11} = \frac{\varepsilon(k_{z2}\mu + k_{z1}\mu_1)(k_{z2}\mu_3 \cos^2 \theta + k_{z1}\mu \sin^2 \theta) + k_{z1}(k_{z1}(\alpha_{12}^2 - \varepsilon_1\mu_1) - k_{z2}\varepsilon_1\mu)\mu_3}{\varepsilon(k_{z2}\mu + k_{z1}\mu_1)(k_{z2}\mu_3 \cos^2 \theta - k_{z1}\mu \sin^2 \theta) - k_{z1}(k_{z1}(\alpha_{12}^2 - \varepsilon_1\mu_1) - k_{z2}\varepsilon_1\mu)\mu_3};$$

$$g_{12} = \frac{2k_{z1}k_{z2}\alpha_{12}\mu\mu_3}{\varepsilon(k_{z2}\mu + k_{z1}\mu_1)(k_{z2}\mu_3 \cos^2 \theta - k_{z1}\mu \sin^2 \theta) + k_{z1}(k_{z1}(\alpha_{12}^2 - \varepsilon_1\mu_1) - k_{z2}\varepsilon_1\mu)\mu_3};$$

$$g_{21} = \frac{2k_{z1}k_{z2}\alpha_{12}\varepsilon\mu_3 \cos^2 \theta}{\varepsilon(k_{z2}\mu + k_{z1}\mu_1)(k_{z2}\mu_3 \cos^2 \theta - k_{z1}\mu \sin^2 \theta) - k_{z1}(k_{z1}(\alpha_{12}^2 - \varepsilon_1\mu_1) - k_{z2}\varepsilon_1\mu)\mu_3};$$

$$g_{22} = \frac{\varepsilon(k_{z2}\mu - k_{z1}\mu_1)(k_{z2}\mu_3 \cos^2 \theta - k_{z1}\mu \sin^2 \theta) + k_{z1}(k_{z1}(\alpha_{12}^2 - \varepsilon_1\mu_1) + k_{z2}\varepsilon_1\mu)\mu_3}{\varepsilon(k_{z2}\mu + k_{z1}\mu_1)(k_{z2}\mu_3 \cos^2 \theta - k_{z1}\mu \sin^2 \theta) - k_{z1}(k_{z1}(\alpha_{12}^2 - \varepsilon_1\mu_1) - k_{z2}\varepsilon_1\mu)\mu_3}.$$

Тогда поле падающих, отраженных и прошедших волн:

$$\begin{pmatrix} E_y \\ H_x \end{pmatrix} = \frac{1}{2k_{z1}} \begin{pmatrix} E_0 k_{z1} - H_0 \mu \omega \\ H_0 k_{z1} - E_0 \varepsilon \omega \cos^2 \theta \end{pmatrix} \exp[i(\omega t - mx - k_{z1}z)]; \quad (20)$$

$$\begin{pmatrix} E_r \\ H_r \end{pmatrix} = \frac{1}{2k_{z1}} \begin{pmatrix} (E_0 g_{11} + H_0 g_{12})k_{z1} + (E_0 g_{21} + H_0 g_{22})\mu \omega \\ (E_0 g_{21} + H_0 g_{22})k_{z1} + (E_0 g_{11} + H_0 g_{12})\varepsilon \omega \cos^2 \theta \end{pmatrix} \exp[i(\omega t - mx + k_{z1}z)]; \quad (21)$$

$$\begin{pmatrix} E_t \\ H_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \exp[i(\omega t - mx - k_{z2}z)], \quad (22)$$

где

$$A_1 = \frac{1}{2k_{z2}} (E_0 (k_{z2} + g_{11}k_{z2} + \alpha_{12}\omega + g_{11}\alpha_{12}\omega - g_{21}\mu_1\omega) + H_0 (g_{12}k_{z2} + g_{12}\alpha_{12}\omega - \mu_1\omega - g_{22}\mu_1\omega));$$

$$A_2 = \frac{E_0 (g_{21}k_{z2}\mu_3 + g_{21}\alpha_{12}\mu_3\omega - \varepsilon_1\mu_3\omega - g_{11}\varepsilon_1\mu_3\omega + (1 + g_{11})\varepsilon\mu\omega \sin^2 \theta)}{2k_{z2}\mu_3} +$$

$$+ \frac{H_0 (k_{z2}\mu_3 + g_{22}k_{z2}\mu_3 + \alpha_{12}\mu_3\omega + g_{22}\alpha_{12}\mu_3\omega - g_{12}\varepsilon_1\mu_3\omega + g_{12}\varepsilon\mu\omega \sin^2 \theta)}{2k_{z2}\mu_3}.$$

Используя (20)–(22), проведем расчет отражательной и пропускательной способностей в случае падения электромагнитной ТЕ-волны (рис. 2, 3) [5]:

$$H_0 = 1; E_0 = 1; \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}; \varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12};$$

$$\alpha_{12} = 10^{-10}; \mu = 1; \mu_1 = 1; \mu_3 = 1; \varepsilon = 2; \varepsilon_1 = 5; \omega = 10^6.$$

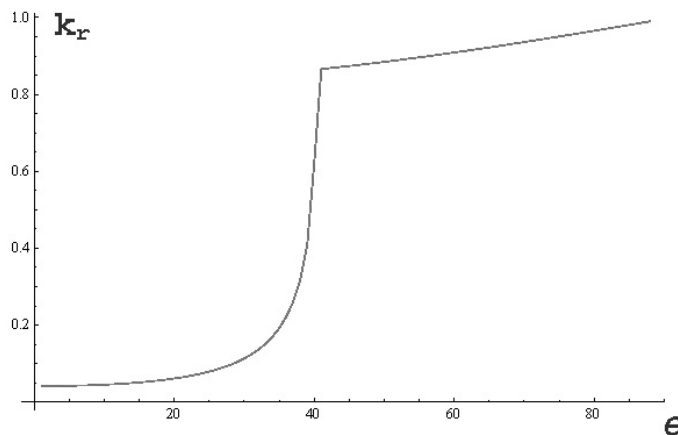


Рисунок 2. Зависимость отражательной способности от угла падения электромагнитной ТЕ-волны

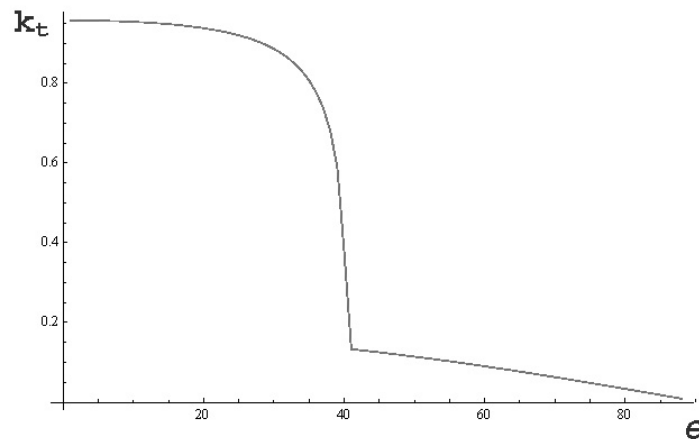


Рисунок 3. Зависимость пропускательной способности от угла падения электромагнитной TE-волны

Таким образом, в данной работе на основе метода матрицанта решена задача отражения электромагнитной TE-волны на границе раздела изотропной среды и магнитоэлектрического кристалла гексагональной сингонии классов  $622$ ,  $6mm$ ,  $6m2$ ,  $6mmm$ . Проведен численный расчет отражательной и пропускательной способностей. Получен «закон преломления» электромагнитной TE-волны на границе раздела изотропной среды и магнитоэлектрического кристалла гексагональной сингонии классов  $622$ ,  $6mm$ ,  $6m2$ ,  $6mmm$ .

#### Список литературы

- 1 Сонин А.С. Курс макроскопической кристаллофизики. — М.: Физматлит, 2006. — 201 с.
- 2 Жукенов М.К., Досанов Т.С., Совет Е.Б. Индикатриссы скоростей распространения электромагнитных волн в магнитоэлектрических средах тетрагональной сингонии // Вестн. ПГУ. — 2014. — № 1. — С. 56–60.
- 3 Тлеуенов С.К. Метод матрицанта. — Павлодар: НИЦ ПГУ им. С. Торайгырова, 2004. — 147 с.
- 4 Тлеуенов С.К., Досанов Т.С., Кынырбеков Б.А. Об отражении волн от однородной анизотропной пьезомагнитной среды при взаимодействии двух типов волн // Вестн. ПГУ. Сер. физ.-мат. — 2010. — № 2. — С. 100–111.
- 5 Борн М., Вольф Э. Основы оптики. — М.: Наука, 1973. — 75 с.

Г.М. Жұмабаева, М.К. Жүкенов, С.К. Тлеуенов, Т.С. Досанов

#### Кластары $622$ , $6mm$ , $6m2$ , $6mmm$ гексагоналды сингониялы магнитэлектрлік кристалдың бетінен электромагниттік ТЕ-толқынның шағылуы туралы мәселесіне

Мақалада матрицант әдісінің негізінде  $622$ ,  $6mm$ ,  $6m2$ ,  $6mmm$  магнитэлектрлік кристалдың гексагоналды бетінен электромагниттік ТЕ-толқындарының бейнелеуіш мәселесі қарастырылған. Еркін зарядтар және токтар болмаған жағдайдағы Максвелл теңдеулерінен және магнитэлектрлік кристалдың анықтауыш қатынастардан тұратын тұйықталған теңдеулер жүйесі зерттелген. Электромагниттік толқындардың таралуын сипаттаушы қарапайым дифференциалдық теңдеулердің жүйесі алынды. Матрица коэффициентінің құрылымы құрылды. Электромагниттік ТЕ-толқындардың «шайқасу заңы» алынып, бейнелеуіш және жіберілуіш қабілеттіліктердің сандық есебі келтірілді.

G.M. Zhumabayeva, M.K. Zhukenov, S.K. Tleukenov, T.S. Dosanov

**About the problem of reflection of the electromagnetic TE-wave  
from the surface of the magnetoelectric crystal hexagonal system  
of classes  $\underline{622}$ ,  $6mm$ ,  $\underline{6m2}$ ,  $\underline{6mmm}$**

In this article, based on matriciant method to solve the problem of reflection of the electromagnetic TE-wave from the surface of the magnetoelectric crystal hexagonal system of classes  $\underline{622}$ ,  $6mm$ ,  $\underline{6m2}$ ,  $\underline{6mmm}$ . Considered a closed system of equations containing the Maxwell equations in the absence of free charges and currents and defining relations for magnetoelectric crystal. Solved a system of ordinary differential equations describing the propagation of electromagnetic waves. Built the structure of coefficients matrix. For electromagnetic TE-wave received the «law of refraction». The reflectance and transmittance capabilities numerically calculated.

References

- 1 Sonin A.S. *Course of a macroscopic crystal physics*, Moscow: Fizmatlit, 2006, 201 p.
- 2 Zhukenov M.K., Dosanov T.S., Sovet E.B. *Bull. of PSU*, 2014, 1, p. 56–60.
- 3 Tleukenov S.K. *Matriciant method*, Pavlodar: SRC PSU, 2004, 147 p.
- 4 Tleukenov S.K., Dosanov T.S., Kynyrbekov B.A. *Bull. of PSU*, 2010, 2, p. 100–111.
- 5 Born M., Wolff E. *Optics basics*, Moscow: Nauka, 1973, 75 p.