

С.К. Тлеукаенов¹, Т.С. Досанов², Ю.А.Вишенкова²¹Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана;²Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова;

(E-mail: matricant@inbox.ru)

Об отражении электромагнитной ТЕ-волны на границе раздела изотропной упругой среды и пьезомагнитного кристалла ромбической сингонии классов 222, mm2, mmm

На основе метода матрицанта решена задача отражения электромагнитной ТЕ-волны, распространяющейся вдоль плоскости xOz на границе раздела изотропной упругой среды и пьезомагнитного кристалла ромбической сингонии классов 222, mm2, mmm. Получена система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая распространение связанных волн вдоль плоскости xOz пьезомагнитной среды указанных классов. Построена структура матриц коэффициентов. Получены z -вые компоненты волновых векторов и «закон преломления» связанных волн. Показано, что «порожденные» упругие волны u -поляризации распространяются практически вдоль оси Oz , так как скорость электромагнитной волны много больше скорости упругой. Проведен численный расчет энергетических коэффициентов отражения и прохождения электромагнитной ТЕ-волны и упругой волны u -поляризации.

Ключевые слова: электромагнитная волна, упругая волна, пьезомагнетизм, задача отражения, энергетические коэффициенты отражения, анизотропная среда, изотропная среда.

В данной работе впервые на основе метода матрицанта решена задача отражения электромагнитной ТЕ-волны, распространяющейся вдоль плоскости xOz на границе раздела изотропной упругой среды и пьезомагнитного кристалла ромбической сингонии классов 222, mm2, mmm.

Вследствие наличия пьезомагнитного эффекта во второй среде падающая электромагнитная волна будет порождать упругую волну, которая будет распространяться как в первой, так и во второй средах. Причем в первой среде электромагнитная ТЕ-волна будет распространяться независимо от упругой, а во второй среде она связана с упругой волной. Проведенные нами расчеты показывают, что в случае анизотропной пьезомагнитной среды ромбической сингонии классов 222, mm2, mmm падающая ТЕ-волна будет порождать упругую волну u -поляризации.

Задача отражения связанных волн на границе пьезомагнитных сред связана с совместным исследованием уравнений движения упругой среды и уравнений Максвелла с использованием граничных условий.

Система уравнений Максвелла в отсутствие свободных зарядов и токов:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (1)$$

где \vec{E} и \vec{H} — напряженности электрического и магнитного полей соответственно; \vec{B} и \vec{D} — индукции магнитного и электрического полей.

Уравнения движения упругих анизотропных сред:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (2)$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; ρ — плотность пьезомагнитной среды; u_i — компоненты смещения точек среды.

Определяющие соотношения для пьезомагнитных сред:

$$\begin{cases} D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} E_j \\ B_i = \mu_0 \mu_{ij} H_j + Q_{ijk} \varepsilon_{jk} \\ \sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} - Q_{ijk} H_k, \end{cases} \quad (3)$$

где ε_0 и μ_0 — электрическая и магнитная постоянные; ε_{ij} — компоненты тензора диэлектрической проницаемости; μ_{ij} — компоненты тензора магнитной проницаемости; Q_{ijk} — компоненты тензора пьезомагнитных модулей; c_{ijkl} — компоненты тензора упругости.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4)$$

— компоненты тензора деформаций.

Декартову систему координат совместим с кристаллографической системой координат. Используем метод разделения переменных, т.е. представляем решения системы (1)–(4) в виде

$$f(x, y, z, t) = f(z) \exp[i(\omega t - mx - ny)], \quad (5)$$

где m и n — x -вая и y -вая составляющие волнового вектора.

В случае пьезомагнитного кристалла ромбической сингонии классов 222, mm2, mmm при $n = 0$ упругая волна u -поляризации связана только с электромагнитной (E_y, H_x) волной [1].

$$\begin{cases} \frac{du_y}{dz} = \frac{1}{c_{44}} \sigma_{yz} + \frac{Q_{14}}{c_{44}} H_x \\ \frac{d\sigma_{yz}}{dz} = \left[-\rho_1 \omega^2 + m^2 \left(c_{66} + \frac{Q_{36}^2}{\mu_0 \mu_{33}} \right) \right] u_y - \frac{im^2 Q_{36}}{\omega \mu_0 \mu_{33}} E_y \\ \frac{dE_y}{dz} = \frac{i\omega Q_{14}}{c_{44}} \sigma_{yz} + i\omega \left(\mu_0 \mu_{11} + \frac{Q_{14}^2}{c_{44}} \right) H_x \\ \frac{dH_x}{dz} = \frac{m^2 Q_{36}}{\mu_0 \mu_{33}} u_y + i\omega \left(\varepsilon_0 \varepsilon_{22} - \frac{m^2}{\omega^2 \mu_0 \mu_{33}} \right) E_y \end{cases} \quad (6)$$

$$\sigma_{xy} = -im \left(c_{66} + \frac{Q_{36}^2}{\mu_0 \mu_{33}} \right) u_y - \frac{m Q_{36}}{\omega \mu_0 \mu_{33}} E_y; \quad H_z = \frac{im Q_{36}}{\mu_0 \mu_{33}} u_y + \frac{m}{\omega \mu_0 \mu_{33}} E_y.$$

Систему (6) можно записать в матричном виде:

$$\frac{d\vec{w}}{dz} = \hat{B} \vec{w}, \quad (7)$$

где $\vec{w} = (u_y, \sigma_{yz}, E_y, H_x)^t$; \hat{B} — матрица коэффициентов.

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & 0 & b_{14} \\ b_{21} & 0 & b_{23} & 0 \\ 0 & i\omega b_{14} & 0 & b_{34} \\ i\omega b_{23} & 0 & b_{43} & 0 \end{pmatrix}; \quad (8)$$

$$b_{12} = \frac{1}{c_{44}}; \quad b_{21} = -\rho \omega^2 + m^2 \left(c_{66} + \frac{Q_{36}^2}{\mu_3} \right); \quad b_{34} = i\omega \left(\mu_1 + \frac{Q_{14}^2}{c_{44}} \right); \quad b_{43} = i\omega \left(\varepsilon_2 - \frac{m^2}{\omega^2 \mu_3} \right);$$

$$b_{14} = \frac{Q_{14}}{c_{44}}; \quad b_{23} = -\frac{im^2 Q_{36}}{\omega \mu_3}.$$

Здесь для краткости введены обозначения: $\varepsilon_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_{22}$; $\mu_1 = \mu_0 \mu_{11}$; $\mu_3 = \mu_0 \mu_{33}$.

Согласно методу матрицанта z -вые компоненты волновых векторов имеют вид [2]:

$$\left. \begin{matrix} k_{z2} \\ \kappa_{z2} \end{matrix} \right\} = \sqrt{-\frac{1}{2} \left(b_{12} b_{21} + b_{34} b_{43} + 2i\omega b_{14} b_{23} \pm (b_{12} b_{21} - b_{34} b_{43}) \sqrt{1 + \frac{4i\omega (b_{14} b_{21} + b_{23} b_{34}) (b_{12} b_{23} + b_{14} b_{43})}{(b_{12} b_{21} - b_{34} b_{43})^2}} \right)}. \quad (9)$$

Пусть на границу раздела изотропной упругой среды и пьезомагнитного кристалла ромбической сингонии классов 222, mm2, mmm падает электромагнитная ТЕ-волна (см. рис. 1) [3].

Матрица коэффициентов и ее элементы для первой (изотропной) среды:

$$\hat{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{pmatrix}; \quad (10)$$

$$a_{12} = \frac{1}{c}; a_{21} = -\rho\omega^2 + m^2c; a_{34} = i\omega\mu; a_{43} = i\omega\left(\epsilon - \frac{m^2}{\omega^2\mu}\right).$$

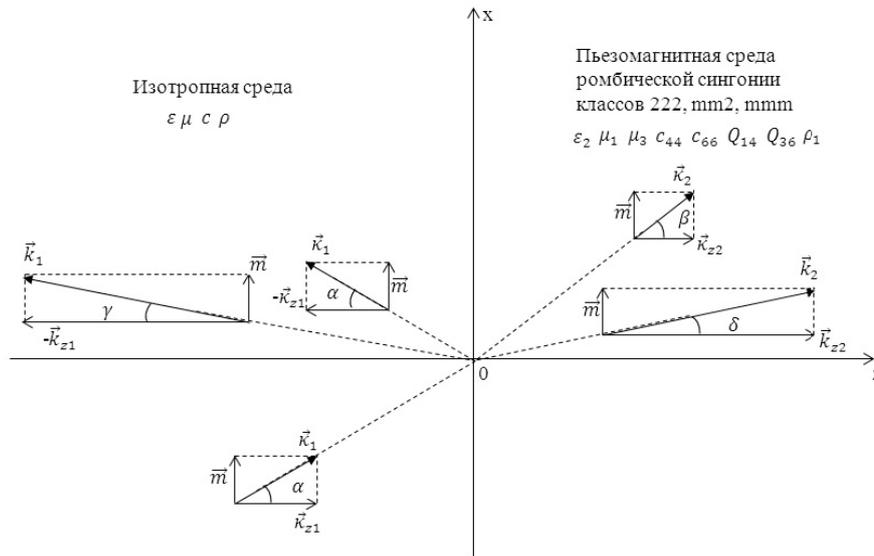


Рисунок 1. Граница раздела изотропной и пьезомагнитной сред, плоскость xOy , на которую падает ТЕ-волна; ее составляющие E_y, H_x и H_z . Углы γ и δ практически равны нулю, так как скорость электромагнитной волны много больше скорости упругой

Компоненты волнового вектора падающей ТЕ-волны:

$$\begin{cases} m = \omega\sqrt{\epsilon\mu} \sin \alpha \\ k_{z1} = \omega\sqrt{\epsilon\mu} \cos \alpha. \end{cases} \quad (11)$$

Волновой вектор упругой волны в первой среде имеет z -вую компоненту

$$k_{z1} = -\omega\sqrt{\frac{\rho}{c}}. \quad (12)$$

Из (9) и (11), (12) получим «закон преломления»:

$$k_{z1}tg\alpha = k_{z2}tg\beta. \quad (13)$$

Матрицант первой среды при $z = 0$:

$$T_1^\pm|_{z=0} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \mp \frac{ia_{12}}{k_{z1}} & 0 & 0 \\ \mp \frac{ia_{21}}{k_{z1}} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \mp \frac{ia_{34}}{k_{z1}} \\ 0 & 0 & \mp \frac{ia_{43}}{k_{z1}} & -1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Матрица коэффициентов и ее элементы для второй (пьезомагнитной среды ромбической сингонии классов 222, mm2, mmm) среды имеют вид (8). Матрицант второй среды при $z = 0$:

$$T_2^+|_{z=0} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 2r_{12} & 0 & 2r_{14} \\ 2r_{21} & -1 & 2r_{23} & 0 \\ 0 & 2i\omega r_{14} & -1 & 2r_{34} \\ 2i\omega r_{23} & 0 & 2r_{43} & -1 \end{pmatrix}; \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
 r_{12} &= \frac{-ib_{12}(b_{12}b_{21} + \kappa_{z2}^2 + \kappa_{z2}k_{z2} + k_{z2}^2) + b_{14}(2b_{12}b_{23} + b_{14}b_{43})\omega}{2\kappa_{z2}k_{z2}(\kappa_{z2} + k_{z2})}, \\
 r_{14} &= \frac{-i(b_{12}(b_{14}b_{21} + b_{23}b_{34}) + b_{14}(b_{34}b_{43} + \kappa_{z2}^2 + \kappa_{z2}k_{z2} + k_{z2}^2 + ib_{14}b_{23}\omega))}{2\kappa_{z2}k_{z2}(\kappa_{z2} + k_{z2})}, \\
 r_{21} &= \frac{-ib_{21}(b_{12}b_{21} + \kappa_{z2}^2 + \kappa_{z2}k_{z2} + k_{z2}^2) + b_{23}(2b_{14}b_{22} + b_{23}b_{34})\omega}{2\kappa_{z2}k_{z2}(\kappa_{z2} + k_{z2})}, \\
 r_{23} &= \frac{-i(b_{12}b_{21}b_{23} + b_{14}b_{21}b_{43} + b_{23}(b_{34}b_{43} + \kappa_{z2}^2 + \kappa_{z2}k_{z2} + k_{z2}^2)) + b_{14}b_{23}\omega}{2\kappa_{z2}k_{z2}(\kappa_{z2} + k_{z2})}, \\
 r_{34} &= \frac{-ib_{34}(b_{34}b_{43} + \kappa_{z2}^2 + \kappa_{z2}k_{z2} + k_{z2}^2) + b_{14}(b_{14}b_{21} + 2b_{23}b_{34})\omega}{2\kappa_{z2}k_{z2}(\kappa_{z2} + k_{z2})}, \\
 r_{43} &= \frac{-ib_{43}(b_{34}b_{43} + \kappa_{z2}^2 + \kappa_{z2}k_{z2} + k_{z2}^2) + b_{23}(b_{12}b_{23} + 2b_{14}b_{43})\omega}{2\kappa_{z2}k_{z2}(\kappa_{z2} + k_{z2})}.
 \end{aligned}$$

Падающая волна

$$(u_a, \sigma_a, E_a, H_a)^t = \hat{T}_1^+ \vec{w}_a. \quad (16)$$

Отраженная волна

$$(u_r, \sigma_r, E_r, H_r)^t = \hat{T}_1^- \hat{G} \vec{w}_a. \quad (17)$$

Прошедшая волна

$$(u_t, \sigma_t, E_t, H_t)^t = \hat{T}_2^+ (\hat{G} + \hat{E}) \vec{w}_a, \quad (18)$$

где $\vec{w}_a = (0, 0, E_0, H_0)^t$.

$$\hat{G} = (\hat{T}_2^+|_{z=0} - \hat{T}_1^-|_{z=0})^{-1} (\hat{T}_1^+|_{z=0} - \hat{T}_2^+|_{z=0}) \quad (19)$$

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} -1 + g_{11} & 0 & g_{13} & 0 \\ 0 & -1 + g_{22} & 0 & g_{24} \\ g_{31} & 0 & -1 + g_{33} & 0 \\ 0 & g_{42} & 0 & -1 + g_{44} \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
 g_{11} &= \frac{2a_{21}(a_{43} + 2i\kappa_{z1}r_{43})}{(a_{21} + 2ik_{z1}r_{21})(a_{43} + 2i\kappa_{z1}r_{43}) + 4i\kappa_{z1}k_{z1}r_{23}^2\omega}; & g_{13} &= -\frac{4a_{43}k_{z1}r_{23}}{(-ia_{21} + 2k_{z1}r_{21})(a_{43} + 2i\kappa_{z1}r_{43}) + 4\kappa_{z1}k_{z1}r_{23}^2\omega}; \\
 g_{22} &= \frac{2a_{12}(a_{34} + 2i\kappa_{z1}r_{34})}{(a_{12} + 2ik_{z1}r_{12})(a_{34} + 2i\kappa_{z1}r_{34}) + 4i\kappa_{z1}k_{z1}r_{14}^2\omega}; & g_{24} &= -\frac{4a_{34}k_{z1}r_{14}}{(-ia_{12} + 2k_{z1}r_{12})(a_{34} + 2i\kappa_{z1}r_{34}) + 4\kappa_{z1}k_{z1}r_{14}^2\omega}; \\
 g_{31} &= -\frac{4ia_{21}\kappa_{z1}r_{23}\omega}{(-ia_{21} + 2k_{z1}r_{21})(a_{43} + 2i\kappa_{z1}r_{43}) + 4\kappa_{z1}k_{z1}r_{23}^2\omega}; & g_{33} &= \frac{2a_{43}(a_{21} + 2ik_{z1}r_{21})}{(a_{21} + 2ik_{z1}r_{21})(a_{43} + 2i\kappa_{z1}r_{43}) + 4i\kappa_{z1}k_{z1}r_{23}^2\omega}; \\
 g_{42} &= -\frac{4ia_{12}\kappa_{z1}r_{14}\omega}{(-ia_{12} + 2k_{z1}r_{12})(a_{34} + 2i\kappa_{z1}r_{34}) + 4\kappa_{z1}k_{z1}r_{14}^2\omega}; & g_{44} &= \frac{2a_{34}(a_{12} + 2ik_{z1}r_{12})}{(a_{12} + 2ik_{z1}r_{12})(a_{34} + 2i\kappa_{z1}r_{34}) + 4i\kappa_{z1}k_{z1}r_{14}^2\omega}.
 \end{aligned}$$

Энергетический коэффициент отражения (прохождения) электромагнитной ТЕ-волны — это отношение среднего значения z -вой компоненты плотности потока энергии отраженной (прошедшей) ТЕ-волны к среднему значению z -вой компоненты плотности потока энергии падающей ТЕ-волны:

$$K_{эм}^{omp} = \frac{E_r H_r^*}{E_a H_a^*}, \quad K_{эм}^{np} = \frac{E_t H_t^*}{E_a H_a^*}, \quad (21)$$

знак «*» указывает на комплексное сопряжение.

Энергетический коэффициент отражения (прохождения) упругой волны y -поляризации — это отношение среднего значения z -вой компоненты плотности потока энергии упругой волны в первой (во второй) среде к среднему значению z -вой компоненты плотности потока энергии падающей ТЕ-волны:

$$K_{упр}^{omp} = \frac{i\omega u_r \sigma_r^*}{E_a H_a^*}, \quad K_{упр}^{np} = \frac{i\omega u_t \sigma_t^*}{E_a H_a^*}. \quad (22)$$

Проведем численный расчет энергетических коэффициентов отражения и прохождения при следующих параметрах изотропной и пьезомагнитной сред (см. рис. 2, 3):

$$E_a = 1 \text{ В/м}; H_a = 1 \text{ А/м}; \omega = 10^6 \text{ рад/с};$$

$$c = 2 \times 10^{11} \text{ Па}; \rho = 5 \times 10^3 \text{ кг/м}^3; \epsilon = 5 \times 8,85 \times 10^{-12} \text{ Ф/м}; \mu = 1 \times 4\pi \times 10^{-7} \text{ Гн/м};$$

$$c_{44} = 4 \times 10^{10} \text{ Па}; c_{66} = 6 \times 10^{10} \text{ Па}; \rho_1 = 6 \times 10^3 \text{ кг/м}^3;$$

$$\mu_1 = 2 \times 4\pi \times 10^{-7} \text{ Гн/м}; \mu_3 = 3 \times 4\pi \times 10^{-7} \text{ Гн/м}; \epsilon_2 = 3 \times 8,85 \times 10^{-12} \text{ Ф/м}.$$

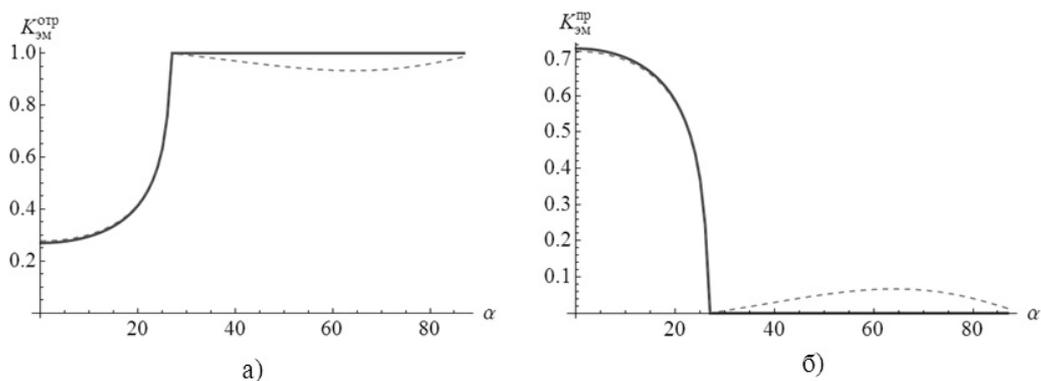


Рисунок 2. Зависимость энергетического коэффициента отражения (а) и прохождения (б) электромагнитной ТЕ-волны от угла падения волны на границу раздела двух сред при $Q_{14} = Q_{36} = 0$ (непрерывная линия) и при $Q_{14} = 7000 \text{ Н/(А·м)}$; $Q_{36} = 15000 \text{ Н/(А·м)}$ (пунктирная линия)

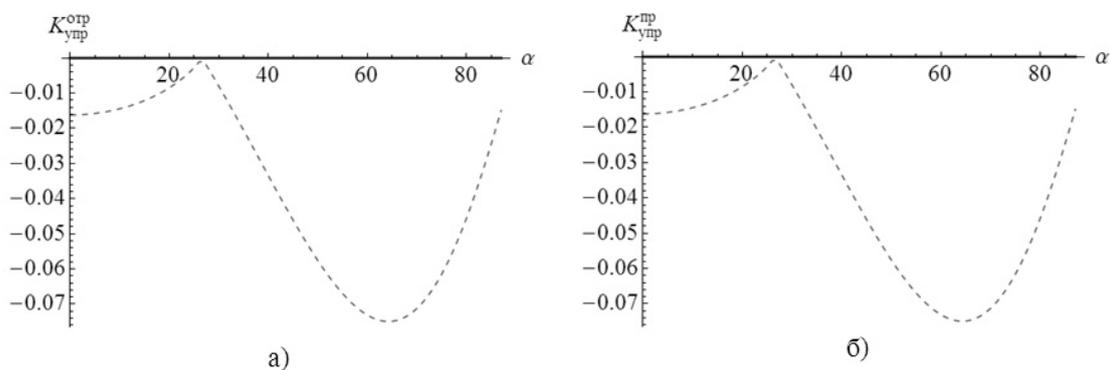


Рисунок 3. Зависимость энергетического коэффициента отражения (а) и прохождения (б) упругой волны у-поляризации от угла падения волны на границу раздела двух сред при $Q_{14} = Q_{36} = 0$ (непрерывная линия) и при $Q_{14} = 7000 \text{ Н/(А·м)}$; $Q_{36} = 15000 \text{ Н/(А·м)}$ (пунктирная линия)

Таким образом, в данной работе решена задача отражения электромагнитной ТЕ-волны, распространяющейся вдоль плоскости xOz на границе раздела изотропной упругой среды и пьезомагнитного кристалла ромбической сингонии классов 222, $mm2$, mmm . Получена система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая распространение связанных упругих и электромагнитных волн. Построена структура матриц коэффициентов. Вычислены z -вые компоненты волновых векторов в пьезомагнитной среде. Проведен численный расчет энергетических коэффициентов отражения и прохождения электромагнитной ТЕ-волны и упругой волны у-поляризации.

Список литературы

- 1 Тлеуенов С.К., Досанов Т.С. О распространении пьезомагнитных волн в неограниченной анизотропной среде ромбической сингонии классов 222, $mm2$, mmm с пьезомагнитным эффектом // Изв. НАН РК. — 2009. — № 5.
- 2 Тлеуенов С.К. Метод матрицанта. — Павлодар: НИЦ ПГУ им. С. Торайгырова, 2004. — 147 с.

3 Тлеуенов С.К., Досанов Т.С. К задаче отражения электромагнитной ТМ-волны на границе раздела изотропного полупространства и анизотропной среды класса 42.2 с пьезомагнитным эффектом // Вестн. КНПУ им. Абая. Сер. Физ.-мат. науки. — 2007. — С. 37–42.

С.К. Тлеуенов, Т.С. Досанов, Ю.А.Вишенкова

Кластары 222, mm2, mmm ромбылық сингониялы пьезомагнитті кристалл мен изотропты серпімді ортаның шекарасындағы электромагниттік ТЕ-толқынның шағылу есебі туралы

Мақалада матрицант әдісінің негізінде xOz жазықтығы бойымен таралып жатқан кластары 222, mm2, mmm ромбылық сингониялы пьезомагнитті кристалл мен изотропты серпімді орталардың шекарасында электромагниттік ТЕ-толқынның шағылу есебі шешілді. Пьезомагнитті ортаның көрсетілген кластары үшін xOz жазықтығы бойымен таралатын байланысқан толқындарды бейнелейтін кәдімгі дифференциалдық тендеулердің жүйесі алынды. Коэффициенттер матрицасының құрылымы құрылған. Толқындық векторлардың z -құраушылары және байланысқан толқындардың «сыну заңы» алынды. Электромагниттік толқындардың жылдамдығы серпімді толқындардың жылдамдығынан едәуір үлкен болғандықтан, «пайда болған» серпімді толқындары Oz осі бойымен таралатыны көрсетілген. Электромагниттік ТЕ-толқынның және y -поляризациялы серпімді толқындардың шағылу және өту энергиялық коэффициенттерінің сандық есептеулері жүргізілді.

S.K. Tleukenov, T.S. Dosanov, Yu.A. Vishenkova

About the reflection of electromagnetic TE-wave at the interface between isotropic elastic medium and piezo-crystal orthorhombic classes 222 mm2, mmm

The problem of reflection of the electromagnetic TE-wave propagating along xOz plane at the boundary of an isotropic elastic medium section and piezomagnetic orthorhombic crystal classes 222, mm2, mmm was solved by matrix method. The system of ordinary differential equations describing the propagation of associated waves along the plane of the xOz piezo-magnetic environment specified classes was obtained. The structure of matrix coefficients was built. The z -components of the wave vectors and the «law of refraction» of coupled waves were obtained. It is shown that «generated» y -polarization elastic waves propagate at the virtually along the Oz axis, as the speed of the electromagnetic wave is much greater than the speed of elastic wave. The numerical calculation of the reflection and transmission energy coefficients of electromagnetic TE-wave and y -polarization elastic wave was carried out.

References

- 1 Tleukenov S.K., Dosanov T.S. *News of NAS RK*, 2009, 5.
- 2 Tleukenov S.K. *Matrix method*, Pavlodar: Research Center of S.Toraighyrov PSU, 2004, 147 p.
- 3 Tleukenov S.K., Dosanov T.S. *Bull. of Abai KazNPU, Ser. Phys.-math.*, 2007, p. 37–42.