

О.В. Разина, П.Ю. Цыба, Ж.М. Сагидуллаева

*Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
(E-mail: olvikraz@mail.ru)*

Степенное решение модели $f(R)$ -гравитации с максвелловским членом и g -эссенцией

В статье рассмотрена модель $f(R)$ -гравитации с максвелловским членом $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ и g -эссенцией в четырех измерениях совместно с однородной, изотропной и плоской Вселенной Фридмана-Робертсона-Уокера. Введение в действие для $f(R)$ -гравитации максвелловского члена позволяет найти новые подходы к решению проблемы наблюдаемого ускоренного расширения Вселенной. g -эссенция содержит, как и частный случай, две важные модели: k -эссенцию и f -эссенцию. Для этой модели найдена система уравнений движения. Построено степенное решение для масштабного фактора, скалярного и фермионного полей. Получено выражение для 4-вектора потенциала. Восстановлены скалярный и фермионный потенциалы. Получены и изучены энергетические условия. Данные условия накладывают очень простые и не зависящие от модели ограничения на поведение плотности энергии и давления, так как не требуют определенного уравнения состояния вещества. Для рассматриваемой модели выполняется нулевое, слабое и доминирующее энергетическое условие и не выполняется сильное энергетическое условие. Найдены плотность энергии, давление, параметр уравнения состояния ω , параметр замедления q и параметр рывка j , значения которых соответствуют ускоренному расширению Вселенной при $\lambda > 1$.

Ключевые слова: $f(R)$ -гравитация, гравитация Эйнштейна-Маквелла, g -эссенция, энергетические условия, уравнение состояния, параметр замедления.

Введение

В течение последних ста лет произошла огромная эволюция наших представлений о Вселенной: от статической системы с одной галактикой до Вселенной, расширяющейся миллиарды лет после «большого взрыва». XX век называют золотым веком космологии, так как именно в это время был получен основной объем космологических знаний и представлений об устройстве Вселенной. Это произошло из-за развития ОТО и появления более мощных телескопов, действующих в различных участках спектра электромагнитных волн, что позволило колоссально расширить масштаб наземных и космических наблюдений [1–5]. На основе огромного объема полученной информации появилась Стандартная космологическая модель. Согласно этой модели, мы живем в пространственно плоской, ускоренно расширяющейся Вселенной, которая на три четверти состоит из темной энергии и на одну пятую — из темной материи с небольшими добавками барионной материи и релятивистского компонента [6].

В ОТО на современном этапе стоит проблема наблюдаемого ускоренного расширения Вселенной. Ускорение указывает на силу, которая определяет движение тел. Этой силой не может быть притяжение космических тел друг к другу: взаимное тяготение галактик способно лишь тормозить их

разбегание. А ускорять это движение может сила противоположного знака — она и называется всемирным антитяготением [7].

Также особый интерес представляет рассмотрение различных моделей со скалярными и фермионными полями. Это связано с тем, что они находят широкое применение в теориях элементарных частиц, астрофизике и космологии. Интерес к скалярным и фермионным полям обусловлен, в том числе, и относительной простотой получаемых уравнений и решений в моделях с их использованием. Это позволяет проводить качественный анализ уравнений и находить достаточно ясную физическую интерпретацию получаемых результатов, исходя из аналогий из других областей физики [7–20].

Необходимость изучения модифицированных теорий $f(R)$ -гравитации со скалярными и фермионными полями (g -эссенцией) мотивирована исследованием космологических моделей и точным измерением космологических параметров с целью изучения фундаментальных свойств материи и получения ограничений на классы фундаментальных теорий, в частности, изучения проблем темной энергии и темной материи.

Введение в действие для $f(R)$ -гравитации тензора электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ (максвелловского члена) позволяет найти новые подходы к решению многих проблем космологии, например, наблюдаемого ускоренного расширения Вселенной.

В данной статье рассмотрим действие $f(R)$ -гравитации с максвелловским членом и g -эссенцией. Найдем уравнения движения. Построим решение рассматриваемой модели. Определим, может ли такая модель описывать ускоренное расширение Вселенной.

Единицы измерения выбираем так, что $8\pi G = c = \hbar = 1$.

Модель $f(R)$ -гравитации с максвелловским членом и g -эссенцией

Рассмотрим действие $f(R)$ -гравитации с максвелловским членом и g -эссенцией в четырех измерениях:

$$S_{fMg} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \{R + f(R) - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + 2K(X, Y, \phi, \psi, \bar{\psi})\}, \quad (1)$$

где ковариантный тензор электромагнитного поля определяется при помощи производной от 4-вектора потенциала:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2)$$

и K является функцией своих аргументов, ϕ — скалярная функция; $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^T$ является фермионной функцией, а $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ — ее сопряженной функцией. Здесь

$$X = 0.5 g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi, \quad Y = 0.5 i [\bar{\psi} \Gamma^\mu D_\mu \psi - (D_\mu \bar{\psi}) \Gamma^\mu \psi]$$

являются каноническими кинетическими членами скалярного и фермионного полей соответственно; ∇_μ и D_μ — ковариантные производные. Заметим, что фермионные поля рассматриваются здесь как классические коммутирующие поля.

Анзац решения для максвелловского члена задается формулой A_μ и является функцией от t . Тогда

$$F_{01} = -F_{10} = \dot{A}_1, \quad F_{02} = -F_{20} = \dot{A}_2, \quad F_{03} = -F_{30} = \dot{A}_3,$$

точка означает производную по времени (все остальные компоненты $F_{\mu\nu}$ эквивалентны нулю).

Рассмотрим однородную, изотропную и плоскую Вселенную Фридмана-Робертсона-Уокера (ФРУ), заполненную g -эссенцией. В этом случае метрика имеет вид

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (3)$$

где $a(t)$ является масштабным фактором Вселенной. Для этой метрики уравнение (2) примет вид

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2[g^{00} g^{11} (F_{01})^2 + g^{00} g^{22} (F_{02})^2 + g^{00} g^{33} (F_{03})^2] = -\frac{2}{a^2} [(\dot{A}_1)^2 + (\dot{A}_2)^2 + (\dot{A}_3)^2]. \quad (4)$$

Тогда действие (1) совместно с (4) запишется в виде

$$S_{fMg} = \frac{1}{8\pi G} \int d^4x \{-3a\dot{a}^2 + \frac{1}{2}a^3 f + a[(\dot{A}_1)^2 + (\dot{A}_2)^2 + (\dot{A}_3)^2] + a^3 K\}. \quad (5)$$

В случае метрики ФРУ (3) уравнения движения, соответствующие действию (5), запишутся как

$$3H^2 - \rho = 0; \quad (6)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 + p = 0; \quad (7)$$

$$\ddot{A}_1 + H\dot{A}_1 = 0; \quad (8)$$

$$\ddot{A}_2 + H\dot{A}_2 = 0; \quad (9)$$

$$\ddot{A}_3 + H\dot{A}_3 = 0; \quad (10)$$

$$K_X \ddot{\phi} + (\dot{K}_X + 3HK_X) \dot{\phi} - K_\phi = 0; \quad (11)$$

$$K_Y \dot{\psi} + 0.5(3HK_Y + \dot{K}_Y) \psi - i\gamma^0 K_\psi = 0; \quad (12)$$

$$K_Y \dot{\bar{\psi}} + 0.5(3HK_Y + \dot{K}_Y) \bar{\psi} + iK_\psi \gamma^0 = 0; \quad (13)$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (14)$$

где $H = \frac{\dot{a}}{a}$ является параметром Хаббла, канонические кинетические члены скалярного и фермионного полей

$$X = 0.5\dot{\phi}^2, \quad Y = 0.5i(\bar{\psi}\gamma^0\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\gamma^0\psi).$$

Плотность энергии и давление принимают вид

$$\rho = -3H\dot{R}f_{RR} + 3(\dot{H} + H^2)f_R - 0.5f + 2K_X X + K_Y Y - K + \frac{[(\dot{A}_1)^2 + (\dot{A}_2)^2 + (\dot{A}_3)^2]}{a^2};$$

$$p = \dot{R}^2 f_{RRR} + (2H\dot{R} + \ddot{R})f_{RR} - (3H^2 + \dot{H})f_R + 0.5f + K + \frac{[(\dot{A}_1)^2 + (\dot{A}_2)^2 + (\dot{A}_3)^2]}{3a^2}.$$

В этой статье мы рассмотрим действие g-эссенции (5) с

$$K = \varepsilon X + \sigma Y - V_1(\phi) - V_2(u) - \eta\phi u,$$

где $\eta = const$; $u = \bar{\psi}\psi$; ε и σ — некоторые константы. Здесь мы можем отметить, что $\varepsilon = 1$ ($\varepsilon = -1$) соответствует обычному (фантомному) случаю. Тогда система (6)-(14) примет вид

$$3H^2 - \rho = 0; \quad (15)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 + p = 0; \quad (16)$$

$$\ddot{A}_1 + H\dot{A}_1 = 0; \quad (17)$$

$$\ddot{A}_2 + H\dot{A}_2 = 0; \quad (18)$$

$$\ddot{A}_3 + H\dot{A}_3 = 0; \quad (19)$$

$$\varepsilon\ddot{\phi} + 3\varepsilon H\dot{\phi} + \eta u + V_{1\phi} = 0; \quad (20)$$

$$\sigma\dot{\psi} + \frac{3}{2}\sigma H\psi + iV_2'\gamma^0\psi + i\eta\gamma^0\psi\phi = 0; \quad (21)$$

$$\sigma\dot{\bar{\psi}} + \frac{3}{2}\sigma H\bar{\psi} - iV_2'\bar{\psi}\gamma^0 - i\eta\phi\bar{\psi}\gamma^0 = 0; \quad (22)$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (23)$$

где

$$\rho = -3H\dot{R}f_{RR} + 3(\dot{H} + H^2)f_R - 0.5f + 0.5\varepsilon\dot{\phi}^2 + V_1 + V_2 + \eta\phi u + \frac{[(\dot{A}_1)^2 + (\dot{A}_2)^2 + (\dot{A}_3)^2]}{a^2};$$

$$p = \dot{R}^2 f_{RRR} + (2H\dot{R} + \ddot{R})f_{RR} - (3H^2 + \dot{H})f_R + 0.5f + 0.5\varepsilon\dot{\phi}^2 - V_1 - V_2 + V_2'u + \frac{[(\dot{A}_1)^2 + (\dot{A}_2)^2 + (\dot{A}_3)^2]}{3a^2}.$$

Исключив f из уравнений (15) и (16), получим

$$\dot{R}^2 f_{RRR} - (H\dot{R} - \ddot{R})f_{RR} + 2\dot{H}f_R + 2\ddot{H} + \varepsilon\dot{\phi}^2 + \eta\phi u + V_2' u + \frac{4[(\dot{A}_1)^2 + (\dot{A}_2)^2 + (\dot{A}_3)^2]}{3a^2} = 0.$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$\ddot{F} - H\dot{F} + 2\dot{H}F + 2\ddot{H} + \varepsilon\dot{\phi}^2 + \eta\phi u + V_2' u + \frac{4[(\dot{A}_1)^2 + (\dot{A}_2)^2 + (\dot{A}_3)^2]}{3a^2} = 0,$$

где $F = \frac{df}{dR}$.

Из (17)–(19) получим выражение для 4-вектора потенциала

$$\dot{A}_n = \frac{b_n}{a} \quad (n = 1, 2, 3), \tag{24}$$

где $b_n = const$.

Система (15)–(23) имеет решение

$$a = a_0 t^\lambda; \tag{25}$$

$$\phi = \phi_0 t^\delta; \tag{26}$$

$$\psi_l = \frac{c_l}{a^{1.5}} e^{iD(t)}, \quad (l = 1, 2); \tag{27}$$

$$\psi_k = \frac{c_k}{a^{1.5}} e^{-iD(t)}, \quad (k = 3, 4); \tag{28}$$

$$u = \frac{c}{a^3} = \frac{c}{a_0^3 t^{3\lambda}}, \tag{29}$$

где c_j подчиняется следующему условию: $c = |c_1|^2 + |c_2|^2 - |c_3|^2 - |c_4|^2$.

На рисунке 1 представлена зависимость масштабного фактора a от времени t для $\lambda = 4$ (сплошная линия), $\lambda = 2$ (пунктирная линия), $\lambda = 1$ (точечная линия), $\lambda = 0,5$ (штрихпунктирная линия). Масштабный фактор имеет смысл радиуса Вселенной. Как видно из рисунка 1, для того чтобы наша модель описывала ускоренное расширение Вселенной, необходимо $\lambda > 1$. При $\lambda < 1$ наблюдается замедленное расширение Вселенной.

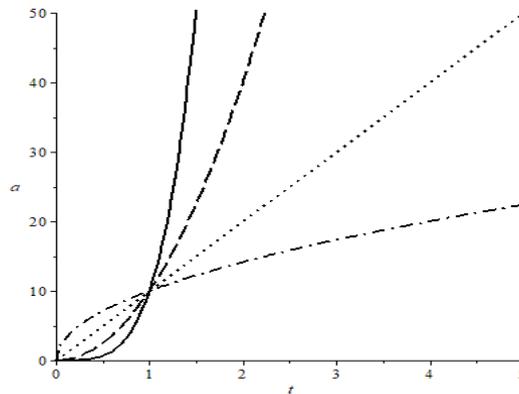


Рисунок 1. Зависимость масштабного фактора a от времени t

Для метрики (3) и скалярного фактора (25) получим скалярную кривизну

$$R = 6(\dot{H} + 2H^2) = \frac{6\lambda(2\lambda-1)}{t^2}.$$

Из (24) и масштабного фактора (25) получим выражение для 4-вектора потенциала в зависимости от времени:

$$A_n = \frac{b_n t^{1-\lambda}}{a_0(1-\lambda)} \quad (n = 1, 2, 3).$$

Из (20) и (25)–(29) потенциал скалярного поля в терминах t и ϕ равен

$$V_1 = -\frac{\varepsilon\phi_0^2\delta^2(\delta-1+3\lambda)}{2(\delta-1)}t^{2(\delta-1)} - \frac{\phi_0\delta\eta c}{a_0^3(\delta-3\lambda)}t^{\delta-3\lambda} - V_{10};$$

$$V_1 = -\frac{\varepsilon\phi_0^2\delta^2(\delta-1+3\lambda)}{2(\delta-1)}\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^{\frac{2(\delta-1)}{\delta}} - \frac{\phi_0\delta\eta c}{a_0^3(\delta-3\lambda)}\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^{\frac{\delta-3\lambda}{\delta}} - V_{10}.$$

Из (21) и (25)–(29) потенциал фермионного поля равен

$$V_2 = \frac{3\lambda c\eta\phi_0}{a_0^3(\delta-3\lambda)}t^{\delta-3\lambda} + \frac{3\lambda c\sigma}{a_0^3}\int \dot{D}t^{-(3\lambda+1)}dt.$$

Тогда уравнение (15) примет вид

$$3H\dot{R}f_{RR} - 3(\dot{H} + H^2)f_R + 0.5f + 3H^2 + \frac{3\varepsilon\phi_0^2\delta^2\lambda}{2(\delta-1)}t^{2(\delta-1)} -$$

$$-\frac{3\lambda c\sigma}{a_0^3}\int \dot{D}t^{-(3\lambda+1)}dt - \frac{b^2}{a_0^4}t^{-4\lambda} + V_{10} = 0, \quad (30)$$

где $b = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$.

Пусть $f = \beta R^l$, $f_R = \beta l R^{l-1}$, $f_{RR} = \beta l(l-1)R^{l-2}$. Тогда из (30) мы получим

$$D = \frac{a_0^3}{3\lambda c\sigma} \left[\frac{4\lambda b^2 t^{-\lambda}}{a_0^4(1-\lambda)} - \frac{6\lambda^2 t^{3\lambda-1}}{3\lambda-1} - \beta \left[1 - \frac{l(\lambda-3+2l)}{2\lambda-1} \right] \frac{[6\lambda(2\lambda-1)]^l t^{3\lambda-2l+1}}{3\lambda-2l+1} + \frac{3\varepsilon\lambda\phi_0^2\delta^2 t^{3\lambda+2\delta-1}}{3\lambda+2\delta-1} \right] + D_0$$

и потенциал фермионного поля в терминах t и u :

$$V_2 = \frac{3\lambda\eta\phi_0 c}{a_0^3(\delta-3\lambda)}t^{\delta-3\lambda} + 3\lambda^2 t^{-2} + \frac{\beta}{2} \left[1 - \frac{l(\lambda-3+2l)}{2\lambda-1} \right] [6\lambda(2\lambda-1)]^l t^{-2l} + \frac{3\varepsilon\lambda\phi_0^2\delta^2}{2(\delta-1)}t^{2(\delta-1)} - \frac{b^2}{a_0^4}t^{-4\lambda} + V_{10};$$

$$V_2 = \frac{3\lambda\eta\phi_0 c}{a_0^3(\delta-3\lambda)} \left(\frac{ua_0^3}{c} \right)^{\frac{3\lambda-\delta}{3\lambda}} + 3\lambda^2 \left(\frac{ua_0^3}{c} \right)^{\frac{2}{3\lambda}} + \frac{\beta}{2} \left[1 - \frac{l(\lambda-3+2l)}{2\lambda-1} \right] [6\lambda(2\lambda-1)]^l \left(\frac{ua_0^3}{c} \right)^{\frac{2l}{3\lambda}} +$$

$$+ \frac{3\varepsilon\lambda\phi_0^2\delta^2}{2(\delta-1)} \left(\frac{ua_0^3}{c} \right)^{\frac{2(1-\delta)}{3\lambda}} - \frac{b^2}{a_0^4} \left(\frac{ua_0^3}{c} \right)^{\frac{4}{3}} + V_{10}.$$

Плотность энергии и давление равны

$$\rho = \frac{3\lambda^2}{t^2}; \quad (31)$$

$$p = \frac{\lambda(2-3\lambda)}{t^2}. \quad (32)$$

Существует целый ряд различных теоретических моделей, которые описывают ускоряющее расширение современной Вселенной. Для этих моделей обычно используются феноменологические соотношения $p = \omega\rho$ между давлением p и плотностью энергии ρ каждой из компонент жидкости, где ω – параметр уравнения состояния, или, для краткости, параметр состояния [7]. Компонента с отрицательным параметром уравнения состояния ω соответствует тёмной энергии. Современные эксперименты, в том числе WMAP, свидетельствуют о том, что в настоящее время параметр состояния темной энергии близок к -1 . В частности, из существующих оценок, полученных по результатам наблюдений, вытекает, что с вероятностью 0,95 значение ω лежит в интервале $-1,45 < \omega < -0,74$. С теоретической точки зрения указанная выше область охватывает три различных случая [7]. Фантомная материя соответствует области пространства с параметром $\omega < -1$, где скалярное поле имеет отрицательную кинетическую энергию [12]. Хотя материя этой формы в настоящее время согласуется с наблюдениями, происхождение такого скалярного поля с необычной кинетической энергией непонятно. С другой стороны, недавно было получено, что фантомное поле необязательно является скалярным, оно также может иметь векторные или тензорные степени свободы [8, 21].

В рассматриваемой нами модели параметр уравнения состояния равен

$$\omega = \frac{p}{\rho} = -1 + \frac{2}{3\lambda}.$$

Полученный параметр состояния соответствует современным наблюдательным данным.

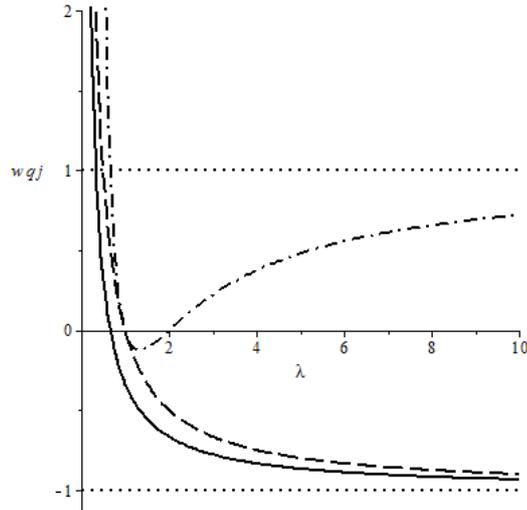


Рисунок 2. Параметр уравнения состояния ω , параметра замедления q и параметра рывка j как функции от λ

На рисунке 2 показана зависимость от λ параметра уравнения состояния ω (сплошная линия), параметра замедления q (пунктирная линия) и параметра рывка j (штрихпунктирная линия).

Большое значение имеют энергетические условия [6]

$$NEC \Rightarrow \rho + p \geq 0; \tag{33}$$

$$WEC \Rightarrow \rho \geq 0, \rho + p \geq 0; \tag{34}$$

$$SEC \Rightarrow \rho + 3p \geq 0, \rho + p \geq 0; \tag{35}$$

$$DEC \Rightarrow \rho \geq 0, -\rho \leq p \leq \rho. \tag{36}$$

Здесь NEC , WEC , SEC и DEC соответственно являются нулевым, слабым, сильным и доминирующим энергетическими условиями. Эти условия накладывают очень простые и не зависящие от модели ограничения на поведение плотности энергии и давления, так как не требуют определенного уравнения состояния вещества. Таким образом, с помощью энергетических условий можно объяснить эволюцию Вселенной, используя общие принципы [6].

Так как мы рассматриваем модель плоской Вселенной с метрикой ФРУ, то можем преобразовать условия (33)-(36) в ограничения на параметр замедления q , который является безразмерной мерой космического ускорения расширения пространства:

$$NEC \Rightarrow q \geq -1; \tag{37}$$

$$SEC \Rightarrow q \geq 0; \tag{38}$$

$$DEC \Rightarrow q \leq 2. \tag{39}$$

Условие WEC всегда выполняется для произвольных вещественных $a(t)$.

При $q > 0$ Вселенная расширяется замедленно. При $q < 0$ Вселенная расширяется ускоренно. Условие NEC (37) имеет достаточно прозрачный смысл. Ускоренное расширение Вселенной возможно только при наличии компонентов с большим отрицательным давлением $p < -\frac{1}{3}\rho$. Энергетическое условие SEC (38) исключает существование таких компонентов. Следовательно, в этом случае $q \geq 0$. Но условия NEC (37) и DEC (39) совместимы с условием $p < -\frac{1}{3}\rho$, поэтому они допускают режимы, в которых $q < 0$ [6].

В рассматриваемой нами модели параметр замедления равен

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = -1 + \frac{1}{\lambda}. \quad (40)$$

Для плотности энергии (31), давления (32) и параметра замедления (40) выполняются энергетические условия NEC, WEC, DEC, но не условие SEC. Как видно из выражения (40) и рисунка 2, при $\lambda > 1$ параметр замедления $q < 0$, следовательно, наша модель описывает ускоренное расширение Вселенной.

Параметр рывка j характеризует скорость изменения ускорения расширения Вселенной:

$$j = \frac{\ddot{a}a^2}{\dot{a}^3} = 1 - \frac{3}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^2}. \quad (41)$$

Современные эксперименты, в том числе сверхновые типа Ia, WMAP, свидетельствуют о том, что в настоящее время параметр рывка близок к 1 [1–4]. Как видно из выражения (41) и рисунка (2), при $\lambda > 1$ параметр рывка стремится к 1.

Заключение

Рассмотрев модель $f(R)$ -гравитации с максвелловским членом и g -эссенцией в четырех измерениях совместно с однородной, изотропной и плоской Вселенной Фридмана-Робертсона-Уокера, нашли уравнения движения, решение для масштабного фактора, скалярного и фермионного полей, восстановили скалярный и фермионный потенциалы, изучили энергетические условия. Для рассматриваемой модели выполняются энергетические условия NEC, WEC, DEC и не выполняется условие SEC. Найдены параметр уравнения состояния ω , параметр замедления q и параметр рывка j , значения которых соответствуют ускоренному расширению Вселенной при $\lambda > 1$. Построили графики для функций масштабного фактора a , параметра уравнения состояния ω , параметра замедления q и параметра рывка j .

В настоящее время космологи плохо понимают, почему расширение Вселенной ускоряется. Наиболее впечатляющий аспект космологического ускорения состоит в том, что различные модели его исследования приводят к одному и тому же выводу и чем больше будет этих моделей, тем быстрее, с появлением новых наблюдательных данных, удастся выбрать наиболее адекватные.

Список литературы

- 1 Riess A.G. Supernova Search Team Collaboration / A.G. Riess, et al. // The Astronomical Journal. — 1998. — Vol. 116, No. 3. — P. 1009–1038. DOI: 10.1086/300499.
- 2 Perlmutter S. Supernova Cosmology Project Collaboration / S. Perlmutter, et al. // The Astrophysical Journal. — 1999. — Vol. 517, No. 2. — P. 565–586. DOI: 10.1086/307221.
- 3 Bennett C.L. First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Preliminary Maps and Basic Results / C.L. Bennett, et al. // The Astrophysical Journal. Supplement series. — 2003. — Vol. 148, No. 1. — P. 1–27. DOI: 10.1086/377253.
- 4 Spergel D.N. First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters / D.N. Spergel, et al. // The Astrophysical Journal. Supplement series. — 2003. — Vol. 148, No. 1. — P. 175–194. DOI: 10.1086/377226.
- 5 Netterfield C.B. A measurement by BOOMERANG of multiple peaks in the angular power spectrum of the cosmic microwave background / C.B. Netterfield, et al. // The Astrophysical Journal. — 2002. — Vol. 571. — P. 604–614. DOI: 10.1086/340118.
- 6 Болотин Ю.Л. Расширяющаяся Вселенная: замедление или ускорение? / Ю.Л. Болотин, Д.А. Ерохин, О.А. Лемец // Успехи физических наук. — 2012. — Т. 182, № 9. — С. 941–986.
- 7 Разина О.В. Точные решения уравнений движения некоторых моделей теории струн и гравитации со скалярными и фермионными полями: дис. ... д-ра философии PhD / О.В. Разина. — Астана, 2012. — С. 8, 9.
- 8 Elizalde E. Born-Infeld quantum condensate as dark energy in the universe / E. Elizalde, J. Lidsey, Sh. Nojiri, S. Odintsov // Physics Letters B. — 2003. — Vol. 574. — P. 1–7. DOI: 10.1016/j.physletb.2003.08.074.
- 9 Armendariz-Picon C. k-inflation / C. Armendariz-Picon, T. Damour, V.F. Mukhanov // Physical Letters B. — 1999. — Vol. 458, No. 7. — P. 209–218. DOI: 10.1016/S0370-2693(99)00603-6.
- 10 Armendariz-Picon C. Essentials of k-essence / C. Armendariz-Picon, V.F. Mukhanov, P.J. Steinhardt // Physical Review D. — 2010. — Vol. 63, No. 10. — P. 3510. DOI: 10.1103/PhysRevD.63.103510.
- 11 Armendariz-Picon C. A dynamical solution to the problem of a small cosmological constant and late-time cosmic acceleration / C. Armendariz-Picon, V.F. Mukhanov, P.J. Steinhardt // Physical Review Letters. — 2000. — Vol. 85, No. 21. — P. 4438–4441. DOI: 10.1103/PhysRevLett.85.4438.

- 12 Chiba T. Kinetically driven quintessence / T. Chiba, T. Okabe, M. Yamaguchi // Physical. Review D. — 2000. — Vol. 62, No. 2. — P. 3511. DOI: 10.1103/PhysRevD.62.023511.
- 13 Nojiri S. Introduction to Modified Gravity and Gravitational Alternative for Dark Energy / S. Nojiri, S.D. Odintsov // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. — 2007. — Vol. 4, No. 1. — P. 115–145. DOI: 10.1142/S0219887807001928.
- 14 Capozziello S. Eye View of $f(R)$ -Gravity / S. Capozziello, A Bird's // Laurentis M. De and Faraoni V. The Open Astronomy Journal. — 2010. — Vol. 3. — P. 49–72. DOI: 10.2174/1874381101003010049.
- 15 Bamba K. Dark energy cosmology: the equivalent description via different theoretical models and cosmography tests / K. Bamba, S. Capozziello, S. Nojiri, S. Odintsov // Astrophysics and Space Science. — 2012. — Vol. 342. — P. 155–228. DOI: 10.1007/s10509-012-1181-8.
- 16 De Putter R. Kinetic k -essence and Quintessence / R. De Putter, E.V. Linder // Astroparticle. Physics. — 2007. — Vol. 28, No. 2. — P. 263–272. DOI: 10.1016/j.astropartphys.2007.05.011.
- 17 Jamil M. Fractional Action Cosmology with Power Law Weight Function / M. Jamil, M.A. Rashid, D. Momeni, O. Razina, K. Esmakhanova // Journal of Physics: Conference Series. — 2012. — Vol. 354, No. 012008.
- 18 Kulnazarov I. G-essence with Yukawa Interactions / I. Kulnazarov, K. Yerzhanov, O. Razina, Sh. Myrzakul, P. Tsyba, R. Myrzakulov // The European Physical Journal C. — 2011. — Vol. 71, No. 7. — P. 1698. DOI: 10.1140/epjc/s10052-011-1698-y.
- 19 Myrzakulov Y. G-essence cosmologies with scalar-fermion interactions / Y. Myrzakulov, N. Serikbayev, S. Myrzakul, O. Razina, G. Nugmanova, R. Myrzakulov // European Physical Journal Plus. — 2011. — Vol. 126, No. 9. — P. 85. DOI: 10.1140/epjp/i2011-11085-9.
- 20 Razina O. Einstein-Cartan gravity and G-essence / O. Razina, I. Kulnazarov, K. Yerzhanov, P. Tsyba, R. Myrzakulov // Central European Journal of Physics. — 2012. — Vol. 10, No. 1. — P. 47–50. DOI: 10.2478/s 11534-011-0102-8.
- 21 Moon T. $f(R)$ black holes / T. Moon, Yu.S. Myung, E.J. Son // General Relativity and Gravitation. — 2011. — Vol. 43. — P. 3079. DOI: 10.1007/s10714-011-1225-3.

О.В. Разина, П.Ю. Цыба, Ж.М. Сагидуллаева

$f(R)$ -гравитациясының максвелдік мүшесі және g -эссенциялы үлгісінің дәрежелі шешімі

Мақалада төртөлшемді $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ максвелл мүшесі және g -эссенциялы $f(R)$ -гравитация моделі Фридман-Робертсон-Уокердің біртекті, изотропты және жазық Ғаламымен бірге қарастырылды. Әсерге $f(R)$ -гравитация үшін максвелдік мүшені қосу Ғаламның байқалатын үдемелі кеңею мәселесін шешуде жана тәсілдер табуға мүмкіндік береді. g -эссенция, дербес жағдай ретінде, екі маңызды модельді құрайды: k -эссенция және f -эссенция. Осы модель үшін қозғалыс теңдеулер жүйесі табылды. Масштабтық фактор, скалярлық және фермиондық өрістер үшін дәрежелік шешім құрылды. Потенциалдың 4-векторы үшін өрнек алынды. Скалярлық және фермиондық потенциалдар калпына келтірілді. Энергетикалық шарттар алынып зерттелінді. Бұл энергетикалық шарттар зат күйінің анықталған теңдеулерін талап етпегендіктен, энергия және қысымның тығыздығына өте қарапайым, модельден тәуелсіз шектеулер қояды. Қарастырылған модель үшін нөлдік, әлсіз және басым энергетикалық шарттар орындалады, дегенмен және күшті энергетикалық шарттар орындалмайды. Мәні $\lambda > 1$ кезде Ғаламның үдемелі кеңеюіне сәйкес келетін энергия тығыздығы, қысым, күй теңдеуінің параметрі ω , тежелу параметрі q және жұлқыныс параметрі j анықталды.

Кілт сөздер: $f(R)$ -гравитациясы, Эйнштейн-Максвелл гравитациясы, g -эссенция, энергетикалық шарттар, күй теңдеуінің параметрі, тежелу параметрі.

O.V. Razina, P.Yu. Tsyba, Zh.M. Sagidullayeva

Power solution of the $f(R)$ -gravity with Maxwell term and g -essence

In this paper the $f(R)$ model of gravity with a Maxwell term $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ and g -essence in four dimensions together with a homogeneous, isotropic and flat Friedman-Robertson-Walker universe is considered. The introduction of the Maxwell term for $f(R)$ gravity allows finding new approaches to solving the problem of the observed accelerated expansion of the Universe. G -essence includes, as a partial case, two important models: k -essence and f -essence. For this model, a system of equations of motion is found. Power solution for the scale factor, scalar and fermion fields was built. An expression for the 4-vector potential is obtained. Scalar and fermion potentials are restored. Energy conditions were investigated and obtained. These conditions impose very simple and independent of the model boundary on the behavior of the energy density and pressure, since they do not require a definite equation of state of matter. For the considered model a zero, weak and dominant energy condition is satisfied and a strong energy condition is not satisfied. The energy density, pressure, parameter of the equation of state ω , the deceleration parameter q and jerk parameter j were found, the value of which corresponds to the accelerated expansion of the universe at $\lambda > 1$.

Keywords: $f(R)$ -gravity, Einstein-Maxwell gravity, g-essence, energy conditions, equation of state, deceleration parameter.

References

- 1 Riess, A.G., & et al. (1998). Supernova Search Team Collaboration, *The Astronomical Journal*, 116(3), 1009–1038, DOI: 10.1086/300499.
- 2 Perlmutter, S., & et al. (1999). Supernova Cosmology Project Collaboration, *The Astrophysical Journal*, 517(2), 565–586, DOI: 10.1086/307221.
- 3 Bennett, C.L., & et al. (2003). First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Preliminary Maps and Basic Results, *The Astrophysical Journal. Supplement series*, 148(1), 1–27, DOI:10.1086/377253.
- 4 Spergel, D.N., & et al. (2003). First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters. *The Astrophysical Journal. Supplement series*, 148(1), 175–194, DOI: 10.1086/377226.
- 5 Netterfield, C.B., & et al. (2002). A measurement by BOOMERANG of multiple peaks in the angular power spectrum of the cosmic microwave background. *The Astrophysical Journal*, 571, 604–614, DOI: 10.1086/340118.
- 6 Bolotin, Yu. L., Erohin, D.A., & Lemec, O.A. (2012). Rasshiriaiushchiasia Vselennaia: zamedlenie ili uskorenie? [Expanding Universe: deceleration or acceleration?]. *Uspekhi fizicheskikh nauk – Advances in Physical Sciences*, 182(9), 941–986 [in Russian].
- 7 Razina, O.V. (2012). Tochnye resheniia uravnenii dvizheniia nekotorykh modelei teorii strun i hravitatsii so skaliarnymi i fermionnymi poliami [The Exact solutions of equations of motion for some models of string and gravity theories with scalar and fermion fields]. *Doctor's thesis*. [in Russian].
- 8 Elizalde, E., Lidsey, J., Nojiri, Sh., & Odintsov, S. (2003). Born–Infeld quantum condensate as dark energy in the universe. *Physics Letters B*, 574, 1–7, DOI: 10.1016/j.physletb.2003.08.074.
- 9 Armendariz-Picon, C., Damour, T., & Mukhanov, V.F. (1999). k-inflation, *Physical Letters B*, 458(7), 209–218, DOI: 10.1016/S0370-2693(99)00603-6.
- 10 Armendariz-Picon, C., Mukhanov, V.F., & Steinhardt, P.J. (2010). Essentials of k-essence, *Physical Review D*, 63(10), 3510, DOI: 10.1103/PhysRevD.63.103510.
- 11 Armendariz-Picon, C., Mukhanov, V.F., & Steinhardt, P.J. (2000). A dynamical solution to the problem of a small cosmological constant and late-time cosmic acceleration. *Physical Review Letters*, 85(21), 4438–4441, DOI: 10.1103/PhysRevLett.85.4438.
- 12 Chiba, T., Okabe, T., & Yamaguchi, M. (2000). Kinetically driven quintessence, *Physical Review D*, 62(2), 3511, DOI: 10.1103/PhysRevD.62.023511.
- 13 Nojiri S., & Odintsov, S.D. (2007). Introduction to Modified Gravity and Gravitational Alternative for Dark Energy, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 4(1), 115–145, DOI: 10.1142/S0219887807001928.
- 14 Capozziello, S. (2010). A Bird's Eye View of $f(R)$ -Gravity, Laurentis M. De and Faraoni V. *The Open Astronomy Journal*, 3, 49–72, DOI: 10.2174/1874381101003010049.
- 15 Bamba, K., Capozziello, S., Nojiri, S., & Odintsov, S. (2012). Dark energy cosmology: the equivalent description via different theoretical models and cosmography tests, *Astrophysics and Space Science*, 342, 155–228, DOI:10.1007/s10509-012-1181-8.
- 16 De Putter, R., & Linder, E.V. (2007). Kinetic k-essence and Quintessence, *Astroparticle Physics*, 28(2), 263–272, DOI: 10.1016/j.astropartphys.2007.05.011.
- 17 Jamil, M., Rashid, M.A., Momeni, D., Razina, O., & Esmakhanova, K. (2012). Fractional Action Cosmology with Power Law Weight Function, *Journal of Physics: Conference Series*. 354, 012008.
- 18 Kulnazarov, I., Yerzhanov, K., Razina, O., Myrzakul, Sh., Tsyba, P., & Myrzakulov, R. (2011). G-essence with Yukawa Interactions, *The European Physical Journal C*, 71(7), 1698, DOI: 10.1140/epjc/s10052-011-1698-y.
- 19 Myrzakulov, Y., Serikbayev, N., Myrzakul, S., Razina, O., Nugmanova, G., & Myrzakulov, R. (2011). G-essence cosmologies with scalar-fermion interactions, *European Physical Journal Plus*, 126(9), 85, DOI:10.1140/epjp/i2011-11085-9.
- 20 Razina, O., Kulnazarov, I., Yerzhanov, K., Tsyba, P., & Myrzakulov, R. (2012). Einstein-Cartan gravity and G-essence, *Central European Journal of Physics*, 10(1), 47–50, DOI: 10.2478/s11534-011-0102-8.
- 21 Moon, T., Myung, Yu.S., & Son, E.J. (2011). $f(R)$ black holes, *General Relativity and Gravitation*, 43, 3079, DOI.org/10.1007/s10714-011-1225-3.