

А. Мустафин

Казахский национальный исследовательский технический университет им. К.И. Сатпаева, Алматы, Казахстан  
(E-mail: butsuri123@gmail.com)

## Динамика двух лазеров, связанных взаимной модуляцией добротности

В приближении скоростных уравнений построена математическая модель синхронизации двух одномодовых полупроводниковых лазеров. Модель представляет собой систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений для концентраций электронов и плотностей фотонов в обоих лазерах. Особенность модели состоит в характере связи между лазерами — она устроена так, что удельные потери каждого лазера пропорциональны интенсивности излучения другого. Помимо того, в уравнениях учитываются нелинейные (квадратичные) потери излучения. Система исследована методами теории бифуркаций и многих масштабов. Показано, что модель проявляет различное поведение при сильной и слабой связи между лазерами. При сильной связи в системе нет колебаний, и в то же время возможны бистабильность и гистерезис. При слабой связи в системе возможно возникновение предельного цикла и пиковых релаксационных колебаний. Выявлено, что синхронные колебания плотности фотонов в лазерах происходят в антифазе. Сделан вывод о возможности применения предложенной схемы синхронизации для получения длиннопериодических осцилляций.

*Ключевые слова:* связанные лазеры, скоростные уравнения, синхронизация, оптическая бистабильность, релаксационные колебания.

### Введение

В последние годы исследования по синхронизации полупроводниковых лазеров привлекают к себе большое внимание как из-за удобства использования лазера в качестве модельной нелинейной колебательной системы, так и из-за потенциальных технических приложений явления синхронизации в телекоммуникациях, электронике и вычислительной технике [1–4].

В большинстве схем синхронизации применяется перекрестная оптоэлектронная связь [5], либо взаимная связь торцом к торцу [6]. В первой схеме излучение каждого лазера преобразуется фотодетектором в электрический сигнал и после усиления используется для модуляции тока накачки другого лазера. Во второй схеме излучение каждого лазера после должного ослабления вводится в другой лазер. При изучении обоих типов связи в определенных условиях, среди которых наиболее важна временная задержка, был обнаружен целый ряд интересных нелинейных эффектов, таких как колебания в виде регулярных пульсаций, квазипериодическое движение и хаос.

В тоже время недостаточно внимания уделяется другому возможному механизму связи, основанного на взаимной модуляции добротности. Технически такую связь можно осуществить с помощью внутрирезонаторного модулятора добротности, управляемого электрическими, магнитными или акустическими импульсами. Например, в [7] теоретически показано возникновение колебательной неустойчивости стационарного состояния двух лазеров Фабри–Перо, связанных указанным образом. Представляется, что разработка методов синхронизации на основе взаимного регулирования добротности может оказаться перспективным направлением исследований.

В предлагаемой работе теоретически изучается система из двух одинаковых лазеров, связанных так, что потери в резонаторе каждого прибора пропорциональны интенсивности излучения другого. Рассмотрение ведется асимптотическим методом многих масштабов в рамках аппарата скоростных уравнений для концентрации электронов и плотности фотонов. При этом, не ограничиваясь традиционным квазигармоническим приближением вблизи бифуркации Андронова–Хопфа, нам удастся построить предельный цикл связанной системы далеко за порогом самовозбуждения, в режиме развитых нелинейных колебаний большой амплитуды.

### Модель

В качестве отправной точки берутся уравнения одномодового лазера класса В (например, [8; 231]), дополненные членами, ответственными за само- и взаимное насыщение:

$$\begin{aligned}
 \dot{n}_1 &= J_1 / (qd) - g(n_1 - n_0)p_1 - n_1 / \tau_e; \\
 \dot{n}_2 &= J_2 / (qd) - g(n_2 - n_0)p_2 - n_2 / \tau_e; \\
 \dot{p}_1 &= (g(n_1 - n_0) - 1 / \tau_p - Dp_1 - h_2 p_2) p_1; \\
 \dot{p}_2 &= (g(n_2 - n_0) - 1 / \tau_p - Dp_2 - h_1 p_1) p_2.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Здесь  $n_i$  и  $p_i$  — соответственно концентрация электронов и плотность фотонов в резонаторе  $i$ -го лазера ( $i = 1, 2$ );  $J_i$  — плотность тока накачки  $i$ -го лазера;  $d$  — ширина активной области резонатора;  $q$  — элементарный заряд;  $n_0$  — концентрация электронов при просветлении;  $\tau_e$  — время жизни носителей заряда в зоне проводимости до спонтанной рекомбинации;  $\tau_p$  — время жизни фотонов внутри резонатора;  $D$  — коэффициент квадратичных потерь;  $h_j$  — коэффициент взаимной модуляции добротности, характеризующий «угнетающее» влияние  $j$ -го лазера на  $i$ -й ( $j \neq i$ );  $g = \Gamma ac / n_g$ , где  $\Gamma$  — фактор оптического ограничения (доля интенсивности излучения, приходящаяся на объем активной области);  $c$  — скорость света в вакууме;  $n_g$  — групповой показатель преломления;  $a$  — коэффициент усиления материала; точки сверху означают дифференцирование по времени  $t$ .

В уравнениях (1), представляющих собой модель с сосредоточенными параметрами, пространственные неоднородности не учитываются: концентрации электронов и плотности фотонов усреднены по длине резонатора.

Типичные значения параметров для полупроводникового лазера, согласно [8; 238], таковы:  $J = 5 \cdot 10^3$  А/см<sup>2</sup>,  $d = 2 \cdot 10^{-5}$  см,  $\Gamma = 0,3$ ,  $n_g = 4$ ,  $a = 2,5 \cdot 10^{-16}$  см<sup>2</sup>,  $g = 5,625 \cdot 10^{-7}$  см<sup>3</sup>/с,  $n_0 = 1 \cdot 10^{18}$  см<sup>-3</sup>,  $\tau_e = 2,2 \cdot 10^{-9}$  с,  $\tau_p = 1,6 \cdot 10^{-12}$  с.

Учет нелинейных (квадратичных) потерь во второй паре уравнений (1) обеспечивает конечность плотности фотонов даже при очень медленной относительной динамике инверсной заселенности (т.е. при практически постоянных  $n_1, n_2$ ). Технически квадратичные потери могут быть реализованы помещением в резонатор (наряду с модулятором добротности) нелинейного элемента. В качестве последнего может выступать полупроводниковый кристалл с двухфотонным поглощением на частоте излучения. Также можно использовать и метод внутррезонаторной генерации второй гармоники на нелинейном кристалле. При этом вторая гармоника (квадратично зависящая от поля основного излучения) свободно выходит из резонатора, а основное излучение остается в нем. Как мы видим, конкретное значение коэффициента квадратичных потерь никак не влияет на выводы модели, и важен лишь факт, что он отличен от нуля. Теоретическая оценка  $D$  дается ниже.

Коэффициенты связи  $h_1, h_2$  — свободные параметры.

Переходя к безразмерным переменным и параметрам по формулам  $u_i = g\tau_p(n_i - n_0) - 1$ ,  $v_i = g\tau_e p_i$ ,  $\tau = t / \tau_e$ ,  $\gamma_i = g\tau_p(J_i\tau_e / (qd) - n_0) - 1$ ,  $\delta = D\tau_p / (g\tau_e)$ ,  $\kappa_j = h_j\tau_p / (g\tau_e)$   $\varepsilon = \tau_p / \tau_e$ , систему (1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
 \dot{u}_1 &= \gamma_1 - (u_1 + 1)v_1 - u_1; \\
 \dot{u}_2 &= \gamma_2 - (u_2 + 1)v_2 - u_2; \\
 \varepsilon\dot{v}_1 &= (u_1 - \delta v_1 - \kappa_2 v_2)v_1; \\
 \varepsilon\dot{v}_2 &= (u_2 - \delta v_2 - \kappa_1 v_1)v_2.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Нужно заметить, что переменная  $v_i$ , будучи пропорциональной своему размерному прототипу  $p_i$ , непосредственно представляет нормированную плотность фотонов. Переменная же  $u_i$  в прямом смысле не есть относительная концентрация носителей. Она, по существу, является аффинным преобразованием  $n_i$ , введенным в целях математического удобства. Тем не менее в дальнейшем для краткости мы будем называть  $u_i$  концентрацией электронов.

### Результаты

При  $\kappa_1, \kappa_2 = 0$  лазеры независимы друг от друга. В каждом устанавливается единственно возможное устойчивое стационарное состояние

$$\begin{aligned}\bar{u} &= ((1 + \delta(4\gamma + 2 + \delta))^{1/2} - 1 - \delta) / 2 = \gamma\delta + O(\delta^2); \\ \bar{v} &= ((1 + \delta(4\gamma + 2 + \delta))^{1/2} - 1 - \delta) / (2\delta) = \gamma - \gamma(\gamma + 1)\delta + O(\delta^2)\end{aligned}\quad (3)$$

с ненулевой интенсивностью излучения. При  $\delta = o(\varepsilon^{1/2})$  стационарное состояние (3) — фокус, а при бóльших  $\delta$  — узел.

Со времен появления первых лазеров известно, что стационарный режим генерации в приборах класса В устанавливается через затухающие пиковые колебания. Также сравнительно давно замечено, что внутрирезонаторные нелинейные поглотители, потери в которых растут с увеличением интенсивности излучения, способствуют сглаживанию или устранению переходных пиковых колебаний [9, 10]. В терминах уравнений (2) это означает переход стационарного состояния от фокуса к узлу при увеличении  $\delta$  от нуля до некоторого критического значения. Поскольку  $\varepsilon = 0.73 \cdot 10^{-3}$ , то можно ожидать, что затухающие колебания интенсивности могут наблюдаться для  $\delta \lesssim 2.7 \cdot 10^{-2}$ , и это соответствует размерной величине коэффициента квадратичных потерь  $D \lesssim 0.77 \cdot 10^{-5}$  см<sup>3</sup>/с. В дальнейшем для определенности мы будем предполагать, что при отсутствии связи устойчивое стационарное состояние каждого из лазеров имеет тип фокуса, хотя, повторим, это непринципиально.

Исследуемая модель проявляет качественно различное поведение при сильной ( $\kappa_1, \kappa_2 > 1$ ) и слабой ( $\kappa_1, \kappa_2 < 1$ ) связи. Система (2) допускает четыре физически возможных стационарных состояния. В нулевом порядке по  $\delta$  имеем

$$\begin{aligned}F: \quad & \bar{u}_1 = \gamma_1, \bar{u}_2 = \gamma_2, \bar{v}_1 = 0, \bar{v}_2 = 0; \\ F_1: \quad & \bar{u}_1 = 0, \bar{u}_2 = \gamma_2, \bar{v}_1 = \gamma_1, \bar{v}_2 = 0; \\ F_2: \quad & \bar{u}_1 = \gamma_1, \bar{u}_2 = 0, \bar{v}_1 = 0, \bar{v}_2 = \gamma_2; \\ F_{12}: \quad & \bar{u}_1 = (\kappa_1\gamma_1 - \kappa_2\gamma_2 - \kappa_1\kappa_2 + 1 \pm R) / (2(\kappa_1 - 1)); \\ & \bar{u}_2 = (-\kappa_1\gamma_1 + \kappa_2\gamma_2 - \kappa_1\kappa_2 + 1 \pm R) / (2(\kappa_2 - 1)); \\ & \bar{v}_1 = \bar{u}_2 / \kappa_1, \bar{v}_2 = \bar{u}_1 / \kappa_2; \\ & R = ((\kappa_1\gamma_1 - \kappa_2\gamma_2 - \kappa_1\kappa_2 + 1)^2 + 4\kappa_2(\kappa_1 - 1)(\kappa_1\gamma_1 - \gamma_2))^{1/2}.\end{aligned}\quad (4)$$

В формулах (4) неподвижные точки обозначаются символом  $F_{12} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{v}_1, \bar{v}_2)$ , где каждый индекс при  $F$  указывает на соответствующий лазер в режиме генерации. Отсутствие какого-либо индекса означает, что данный лазер не излучает. Стационарное состояние  $F$  всегда неустойчиво. Несимметричные стационарные состояния  $F_1$  и  $F_2$  соответственно устойчивы при  $\gamma_2 / \gamma_1 < \kappa_1$  и  $\gamma_1 / \gamma_2 < \kappa_2$ . При сильной связи симметричное состояние  $F_{12}$  существует для  $1 / \kappa_2 < \gamma_2 / \gamma_1 < \kappa_1$ , но всегда неустойчиво. При слабой связи  $F_{12}$  существует для  $\kappa_1 < \gamma_2 / \gamma_1 < 1 / \kappa_2$  и сохраняет устойчивость, если  $\kappa_1, \kappa_2 = o(\varepsilon^{1/2})$ . Ввиду малости  $\varepsilon$  последнее условие практически всегда нарушено в широком интервале не слишком малых (физически разумных) коэффициентов связи.

При сильной связи в исследуемой системе возможны бистабильность и гистерезис. Пусть для определенности накачка  $\gamma_2$  лазера 2 поддерживается на некотором постоянном уровне  $\gamma_2^*$ , а накачка  $\gamma_1$  лазера 1 монотонно увеличивается от какой-то величины, меньшей  $\gamma_2^* / \kappa_1$ . Вначале устойчиво только стационарное состояние  $F_2$ , в котором лазер 2 излучает, а лазер 1 не излучает. По достижении параметром  $\gamma_1$  величины  $\gamma_2^* / \kappa_1$  наряду с  $F_2$  приобретает устойчивость состояние  $F_1$ , но оно пока не реализуемо. Бистабильность сохраняется всюду в интервале  $\gamma_2^* / \kappa_1 < \gamma_1 < \kappa_2\gamma_2^*$ . Наконец, когда  $\gamma_1$  становится больше  $\kappa_2\gamma_2^*$ , стационарное состояние  $F_2$  теряет устойчивость, и система скачком переходит к стационарному режиму  $F_1$ . Лазер 2 гаснет, а лазер 1 зажигается. Если теперь уменьшать накачку первого лазера, то система будет оставаться в стационарном состоянии  $F_1$ , покуда  $\gamma_1$  не станет меньше нижнего критического уровня  $\gamma_2^* / \kappa_1$ , за которым существует только стационарное состояние  $F_2$ . Иными словами, переключение от лазера 2 к лазеру 1 и обратно происходит при разных величинах параметра накачки  $\gamma_1$ . Гистерезис обусловлен бистабильностью несимметричных стационарных

состояний  $F_1$ ,  $F_2$  и неустойчивостью симметричного состояния  $F_{12}$  в параметрической области  $\gamma_2^* / \kappa_1 < \gamma_1 < \kappa_2 \gamma_2^*$ .

При исчезающе слабой связи в системе (2) устойчиво лишь симметричное стационарное состояние  $F_{12}$ . По достижении силой связи некоторого критического значения спектр собственных чисел  $F_{12}$  состоит из двух чисто мнимых и двух комплексно-сопряженных величин с отрицательной действительной частью. Таким образом, при дальнейшем увеличении связи устойчивость  $F_{12}$  нарушается по типу растущих колебаний; происходит бифуркация Андронова–Хопфа с рождением предельного цикла. Пока  $\kappa_1, \kappa_2$  остаются порядка  $\varepsilon^{1/2}$ , цикл мал по амплитуде и отвечает квазигармоническим колебаниям. С практической точки зрения, диапазон таких слабых связей узок и менее интересен в сравнении с гораздо более заметной областью не слишком малых  $\kappa_1, \kappa_2$  порядка единицы, соответствующей хорошо развитым нелинейным колебаниям.

Факт, что  $\varepsilon \ll 1$  делает систему (2) сингулярно возмущенной. Медленными переменными являются концентрации электронов  $u_1$ ,  $u_2$ , быстрыми — плотности фотонов  $v_1$ ,  $v_2$ . Стандартной практикой исследования подобных систем служит адиабатическое исключение быстрых переменных по методу многих масштабов (например, [11]). Для расщепления полной системы (2) на быструю и медленную подсистемы введем «быстрое» время  $\theta = \tau / \varepsilon$ . Заменяя в (2)  $\tau$  на  $\theta\varepsilon$  и положив  $\varepsilon = 0$ , получаем

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2' = 0; \\ v_1' &= (u_1 - \delta v_1 - \kappa_2 v_2) v_1; \\ v_2' &= (u_2 - \delta v_2 - \kappa_1 v_1) v_2, \end{aligned} \tag{5}$$

где штрихи означают дифференцирование по  $\theta$ . Это быстрая подсистема, в которой  $u_1$  и  $u_2$  заменены их начальными значениями и рассматриваются как параметры. Она дает внутреннее решение, пригодное для  $\tau = O(\varepsilon)$ .

Полагая в (2)  $\varepsilon = 0$ , получаем медленную подсистему

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \gamma_1 - (u_1 + 1)v_1 - u_1; \\ \dot{u}_2 &= \gamma_2 - (u_2 + 1)v_2 - u_2; \\ 0 &= (u_1 - \delta v_1 - \kappa_2 v_2) v_1; \\ 0 &= (u_2 - \delta v_2 - \kappa_1 v_1) v_2, \end{aligned} \tag{6}$$

которая порождает внешнее решение, корректное для  $\tau = O(1)$ . В сингулярном пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$  первая пара уравнений системы (6) определяет медленный поток на поверхности (медленном многообразии), задаваемой второй парой уравнений (6), являющихся алгебраическими. По теореме Фенихеля–Тихонова [11; 53], внешнее решение справедливо для тех  $u_1$  и  $u_2$ , при которых квазистационарные состояния быстрой подсистемы (5) устойчивы.

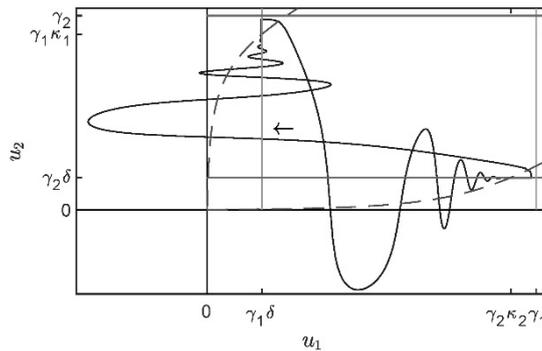
Мы предполагаем, что динамика полной системы (2) в четырехмерном фазовом пространстве  $(u_1, u_2, v_1, v_2)$  состоит из двух типов движений: быстрой посадки на медленное многообразие и медленного скольжения по нему до точки срыва (где внешнее решение теряет справедливость). После этого изображающая точка может скачком перейти на другую устойчивую ветвь медленного многообразия и продолжить по ней движение.

Таким образом, следует найти все квазистационарные состояния быстрой подсистемы (5), отобразить границы их устойчивости на медленной фазовой плоскости  $(u_1, u_2)$  и исследовать динамику системы (6) с помощью кусочно-непрерывных функций.

Быстрая подсистема (5) имеет четыре квазистационарных состояния — тривиальное, два несимметричных и одно симметричное (медленные переменные  $u_1, u_2$  считаются замороженными):

$$\begin{aligned} Q: \quad & \tilde{v}_1 = 0, \tilde{v}_2 = 0; \\ Q_1: \quad & \tilde{v}_1 = u_1 / \delta, \tilde{v}_2 = 0; \\ Q_2: \quad & \tilde{v}_1 = 0, \tilde{v}_2 = u_2 / \delta; \\ Q_{12}: \quad & \tilde{v}_1 = (\kappa_2 u_2 - \delta u_1) / (\kappa_1 \kappa_2 - \delta^2), \tilde{v}_2 = (\kappa_1 u_1 - \delta u_2) / (\kappa_1 \kappa_2 - \delta^2). \end{aligned} \tag{7}$$

Существование и устойчивость квазистационарных состояний (7) определяется положением изображающей точки на плоскости медленных переменных  $(u_1, u_2)$ , изображённой на рисунке 1. Для наглядности оси координат рисунка подвергнуты масштабному преобразованию  $u_i \rightarrow \text{arcsch}(u_i / \gamma_i \delta)$ .  $Q$ ,  $Q_1$  и  $Q_2$  существуют при любых  $u_1, u_2 \geq 0$ .  $Q$  — всегда неустойчивый узел;  $Q_1$  и  $Q_2$  — устойчивые узлы соответственно при  $\delta u_2 < \kappa_1 u_1$  и  $\delta u_1 < \kappa_2 u_2$ , в противном случае это седла. Для не слишком слабой связи  $\kappa_1 \kappa_2 > \delta^2$  квазистационарное состояние  $Q_{12}$  существует и неустойчиво по типу седла для всех  $u_1$  и  $u_2$  удовлетворяющих условию  $\delta u_1 / \kappa_2 < u_2 < u_1 \kappa_1 / \delta$ , т.е. внутри раствора угла, образованного линиями  $\delta u_1 = \kappa_2 u_2$  и  $\kappa_1 u_1 = \delta u_2$ . Ниже верхней штриховой линии  $\kappa_1 u_1 = \delta u_2$  находится область излучения лазера 1, выше нижней штриховой линии  $\kappa_2 u_2 = \delta u_1$  — лазера 2. Область сокращается по мере ослабления силы связи.



Параметры расчета:  $\epsilon = 0.73 \cdot 10^{-3}$ ;  $\gamma_1 = 1.2$ ;  $\gamma_2 = 1$ ;  $\kappa_1 = 0.5$ ;  $\kappa_2 = 0.8$ ;  $\delta = 0.01$

Рисунок 1. Фазовая плоскость медленных переменных  $u_1, u_2$  при слабой связи и проекция на неё предельного цикла системы (2). Стрелкой указано направление движения изображающей точки

Пусть вначале  $Q_1$  устойчиво, а  $Q_2$  — нет. Излучает только лазер 1. Это соответствует положению точки на плоскости медленных переменных  $(u_1, u_2)$  где-то ниже линии  $\delta u_1 = \kappa_2 u_2$ . Пока  $u_1 \gg \gamma_1 \delta$ , динамика концентраций электронов (рассматриваемых как бифуркационные параметры для плотностей фотонов) описывается двумя независимыми уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \gamma_1 - ((u_1 + 1) / \delta + 1)u_1; \\ \dot{u}_2 &= \gamma_2 - u_2, \end{aligned} \quad (8)$$

которые представляют собой версию медленной подсистемы (6) для  $v_1 = u_1 / \delta$  и  $v_2 = 0$ . Система (8) имеет устойчивое стационарное состояние

$$\begin{aligned} \hat{u}_1^{(1)} &= ((1 + (4\gamma_1 + 2 + \delta)\delta)^{1/2} - 1 - \delta) / 2 = \gamma_1 \delta + O(\delta^2); \\ \hat{u}_2^{(1)} &= \gamma_2, \end{aligned} \quad (9)$$

которое лежит приблизительно на пересечении прямых  $u_1 = \gamma_1 \delta$  и  $u_2 = \gamma_2$ . Направляясь к нему, траектория пересекает линию  $\delta u_1 = \kappa_2 u_2$  и входит в область бистабильности  $Q_1$  и  $Q_2$ . Однако излучает по-прежнему только лазер 1.

Ввиду малости  $\delta$  переменная  $u_1$  меняется быстрее, чем  $u_2$ . Поэтому изображающая точка подойдет к вертикальной линии  $u_1 = \hat{u}_1^{(1)} \approx \gamma_1 \delta$  намного раньше, чем к горизонтальной линии  $u_2 = \hat{u}_2^{(1)} = \gamma_2$ .

Заметим, что, согласно формулам (3),  $\hat{u}_1^{(1)}$  — это стационарная инверсная заселенность в свободном лазере 1. В непосредственной близости к фокальной точке разделение переменных на медленные и быстрые для лазера 1 теряет смысл, и в силу этого первое уравнение системы (8) с адиабатически исключенной переменной  $v_1$  дольше неадекватно. Вместо него следует написать нередуцированную систему уравнений свободного лазера 1, описывающую затухающие колебания вблизи устойчивого фокуса:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \gamma_1 - (u_1 + 1)v_1 - u_1; \\ \varepsilon \dot{v}_1 &= (u_1 - \delta v_1)v_1. \end{aligned} \tag{10}$$

На фазовой плоскости медленных переменных  $u_1$  и  $u_2$  эти колебания происходят в горизонтальном направлении и наложены на независимое вертикальное движение изображающей точки вдоль нуль-изоклины  $\dot{u}_1 = 0$  (уравнение которой суть  $u_1 = \hat{u}_1^{(1)} \approx \gamma_1 \delta$ ) медленной подсистемы (6) по направлению к точке (9).

На пути к стационарному состоянию (9) траектория должна пересечь линию  $\kappa_1 u_1 = \delta u_2$ . Как только это случится, узел  $Q_1$  быстрой подсистемы (5) будет поглощен седлом  $Q_{12}$ . Единственным устойчивым квазистационарным состоянием останется  $Q_2$ . Лазер 1 погаснет, а вместо него начнет излучать лазер 2.

Теперь, взяв за начальные условия  $u_1 = \gamma_1 \delta$  и  $u_2 = \gamma_1 \kappa_1$ , мы должны снова вернуться к медленной подсистеме (6), движение которой будет происходить уже по другой устойчивой ветви медленного многообразия. На той ветви все события развиваются совершенно аналогично уже описанному выше. Переменная  $u_2$  сначала сравнительно быстро монотонно уменьшается со скоростью порядка  $1/\delta$ , стремясь к значению  $\hat{u}_2^{(2)} = \gamma_2 \delta + O(\delta^2)$ , а потом совершает около  $\gamma_2 \delta$  затухающие колебания. Переменная  $u_1$  относительно медленно увеличивается по направлению к  $\hat{u}_1^{(2)} = \gamma_1$ , пока не достигнет уровня  $\gamma_2 \kappa_2$ . Там лазеры 1 и 2 вновь поменяются ролями и начнется новый цикл незатухающих колебаний.

### Обсуждение

Таким образом, система уравнений (2), моделирующая связанные лазеры, при не слишком слабой связи совершает релаксационные автоколебания. Колебания интенсивности излучения лазеров происходят строго в противофазе. На рисунке 2 показаны временные развертки плотности фотонов и концентрации электронов для обоих лазеров. Колебания инверсной заселенности имеют пилообразную форму. Их размах остается конечным и, что важно, не зависит от параметра  $\delta$ .

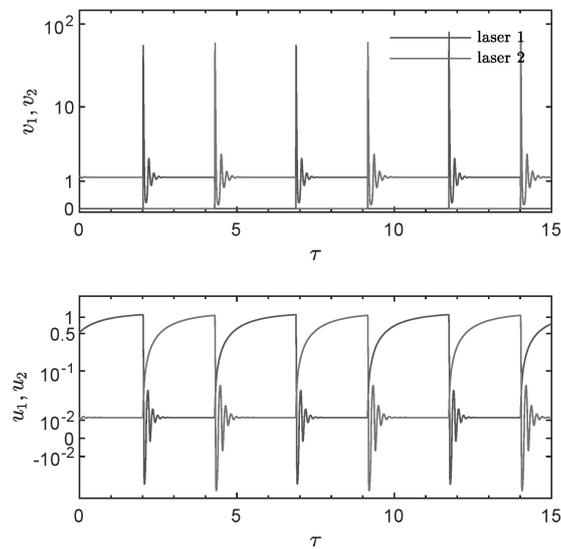


Рисунок 2. Антифазные колебания плотности фотонов (верхний график) и концентрации электронов (нижний график) двух связанных лазеров

Времена движения по каждой из двух ветвей медленного многообразия, задаваемого парой алгебраических уравнений системы (6), вносят основной вклад в период колебаний  $T$ . Эти времена определяются динамикой медленных переменных  $u_1$ ,  $u_2$  и в нулевом порядке по  $\varepsilon$  и  $\delta$  могут быть найдены интегрированием медленных уравнений движения (6) с соответствующими граничными условиями  $(0, \gamma_2 \kappa_2)$  и  $(0, \gamma_1 \kappa_1)$ . Тем самым для периода колебаний получается простая оценка:

$$T \approx \ln(\kappa_2 \gamma_2 / \gamma_1 - 1) + \ln(\kappa_1 \gamma_1 / \gamma_2 - 1). \quad (11)$$

Интересно, что, согласно (11), период зависит только от отношения накачек, но не от каждой из них по отдельности, и совсем не зависит от конкретной величины  $\delta$ .

Плотности фотонов  $\nu_1$  и  $\nu_2$  периодически изменяются между практически полным отсутствием излучения и постоянными уровнями  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Передний фронт каждого прямоугольного импульса света состоит из выраженного пика, за которым следуют быстрозатухающие высокочастотные колебания, соответствующие собственным переходным колебаниям излучения свободного лазера. Высота пика, согласно формулам (7) при  $\delta \rightarrow 0$  становится бесконечной.

В пределах одного периода колебаний интенсивности света выделяются следующие фазы:

1)  $\nu_1$  исчезающе мало, в то время как  $\nu_2$  примерно равно стационарному значению  $\gamma_2$  для свободного лазера.  $u_1$  увеличивается благодаря накачке, пока не будут компенсированы потери в резонаторе лазера 1;

2) по достижении достаточной инверсной заселенности создаются условия для излучения лазера 1. Ввиду быстрой динамики фотонов возникает яркая короткая вспышка. Резко возросшая интенсивность света в лазере 1 формирует управляющий сигнал для пропорционального снижения добротности резонатора лазера 2, который в ответ гаснет;

3) путем затухающих колебаний  $\nu_1$  и  $u_1$  сравнительно быстро достигают постоянных значений, характерных для свободного лазера 1. При этом  $\nu_2$  практически равно нулю, а  $u_2$  медленно увеличивается подобно  $u_1$  в фазе 1;

4)  $u_2$  достигает необходимого уровня для появления излучения в лазере 2. Резонатор лазера 1 получает управляющий сигнал о соответственном уменьшении добротности, из-за чего излучение в лазере 1 пропадает. В лазере 2 идет установление постоянных уровней  $\nu_2$  и  $u_2$  через быстрозатухающие колебания. Последовательность повторяется.

Можно заметить, что в любой момент времени в связанной системе один из лазеров находится в потухшем состоянии, а другой при этом ведет себя как свободный. Следующая особенность динамики выражается в том, как инверсные заселенности управляют включением и выключением генерации по закону: «Всё или ничего». Когда  $u_1$ , например, поднимается выше некоторого порогового уровня (определяемого величиной потерь в лазере 1), лазер 1 начинает излучать, заставляя лазер 2 погаснуть. Поэтому моменты появления и исчезновения излучения определяются циклическим гистерезисом концентраций электронов.

Как уже упоминалось, наличие запаздывания в традиционных схемах синхронизации лазеров является необходимым условием появления колебаний. Противофазные колебания в нашей модели не требуют такой задержки, хотя введение ее, несомненно, может быть предметом отдельного исследования.

Наиболее интригующей особенностью рассмотренной модели связанных лазеров является то, что каждый из лазеров, взятый в отдельности, работает в непрерывном режиме постоянной интенсивности, без пульсаций. Однако во взаимодействии, после наложения перекрестной связи между лазерами в форме билинейных потерь, результирующая система демонстрирует автоколебания. В этом отношении наша модель представляет общезначимый интерес. Дело в том, что классическая теория синхронизации предполагает, что даже в несвязанном состоянии каждая отдельная подсистема совершает незатухающие колебания. Однако возможны случаи, когда локальная связь между элементами системы не просто меняет характер колебаний, устанавливая общую частоту или постоянную разность фаз, но и служит причиной появления колебаний в системе из индивидуально покоящихся элементов. Такие колебания получили название «пробужденных» (awakened) [12].

Впервые на возможность «пробужденных» автоколебаний указал С. Смейл [13], построив абстрактную модель взаимодействия двух биологических клеток, каждая из которых содержит набор из четырех метаболитов, реагирующих по законам химической кинетики. Отдельно взятая клетка «мертва» в том смысле, что концентрации метаболитов пребывают в стационарном состоянии. Однако после включения линейной обменной связи система «оживает», проявляя автоколебательное поведение. Под влиянием пионерской работы Смейла в дальнейшем были предложены реалистические модели возникновения синхронных колебаний в системах связанных неосциллирующих электриче-

ски-активных клеток [14, 15]. Наша модель представляет собой физическую систему с аналогичным феноменом.

Комментируя свой пример, Смейл заметил, что «труднее уменьшить число веществ в задаче до двух или даже до трех» [13; 26]. В отличие от модели Смейла, связь между затухающими осцилляторами в нашей системе нелинейна, и это делает «пробужденные» синхронные колебания возможными уже для двух фазовых переменных.

### Заключение

В формализме скоростных уравнений нами построена модель двух полупроводниковых лазеров, перекрестно связанных так, что каждый из них может регулировать потери в резонаторе другого. Показано, что при умеренно слабой связи в системе устанавливается синхронный автоколебательный режим, в котором лазеры излучают попеременно, в противофазе. Период синхронных колебаний не зависит от силы связи, а определяется накачками и может быть сделан произвольно большим. При сильной связи между лазерами система бистабильна, и в ней может наблюдаться гистерезис.

### References

- 1 Erneux, T., & Glorieux, P. (2010). *Laser Dynamics*. New York, NY: Cambridge University Press, 361 p.
- 2 Uchida, A. (2012). *Optical communication with chaotic lasers*. Weinheim: Wiley-VCH, 640 p.
- 3 Soriano, M.C., et al. (2013). Complex photonics: dynamics and applications of delay-coupled semiconductor lasers. *Reviews of Modern Physics*, 85, 1, 421–470.
- 4 Kreinberg, S., et al. (2019). Mutual coupling and synchronization of optically coupled quantum-dot micropillar lasers at ultra-low light levels. *Nature Communications*, 10, 1. Article ID 1039.
- 5 Kim, M.-Y., et al. (2005). Scaling behavior of laser population dynamics with time-delayed coupling: theory and experiment. *Physical Review Letters*, 94, 8. Article ID 088101.
- 6 Javaloyes, J., Mandel, P., & Pieroux, D. (2003). Dynamical properties of lasers coupled face to face. *Physical Review E*, 67, 3, Article ID 036201.
- 7 Nguyen, B.A., & Mandel, P. (1999). Stability of two loss-coupled lasers. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 1, 3, 320–324.
- 8 Agrawal, G.P., & Dutta, N.K. (2001). *Semiconductor lasers*. (2nd ed.) Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 616 p.
- 9 Kennedy, C.J., & Barry, J.D. (1974). Stability of an intracavity frequency-doubled Nd: YAG laser. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 10, 8, 596–599.
- 10 Jeys, T.H. (1991). Suppression of laser spiking by intracavity second harmonic generation. *Applied Optics*, 30, 9, 1011–1013.
- 11 Kuehn, C. (2015). *Multiple Time Scale Dynamics*. New York, NY: Springer, 815 p.
- 12 Szatmari, I., & Chua, L.O. (2008). Awakening dynamics via passive coupling and synchronization mechanism in oscillatory cellular neural/nonlinear networks. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 36, 5–6, 525–553.
- 13 Smale, S. (1974). A mathematical model of two cells via Turing's equation. *Some Mathematical Questions in Biology V* (ed. by Cowan J.D.) Providence, RI: American Mathematical Society, P. 15–26.
- 14 Loewenstein, Y., Yarom, Y., & Sompolinsky, H. (2001). The generation of oscillations in networks of electrically coupled cells. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 98, 14, 8095–8100.
- 15 Gomez-Marin, A., Garcia-Ojalvo, J., & Sancho, J.M. (2007). Self-sustained spatiotemporal oscillations induced by membrane-bulk coupling. *Physical Review Letters*, 98, 16. Article ID 168303.

А. Мустафин

## Модуляция сапалығына байланысты екі лазердің динамикасы

Жылдамдық теңдеулерін жақындатқанда екі бірмодалы жартылай өткізгіш лазерді синхрондаудың математикалық моделі құрылған. Модель екі лазердеде электрондар концентрациясы мен фотондардың тығыздығына арналған сызықты емес қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесі болып табылады. Бұл модельдің ерекшелігі лазерлер арасындағы байланыс сипатында — ол әрбір лазердің меншікті шығыны екіншісінің сәулелену қарқындылығына пропорционал болатындай етіп жасалған. Бұдан басқа, теңдеулерде сәулеленудің сызықтық емес (квадраттық) шығындары ескеріледі. Жүйе бифуркация теориясы және көптеген масштабтар әдістерімен зерттелді. Модель лазерлер арасындағы күшті және әлсіз байланыс кезінде әртүрлі сипатта. Күшті байланыс кезінде жүйеде тербелістер жоқ, сонымен қатар гистерезис пен бистабильділік болуы мүмкін. Жүйенің әлсіз байланысы кезінде шекті цикл және релаксациялық тербелістер пайда болуы мүмкін. Лазерлердегі фотондар

тығыздығының синхронды тербелістері антифазада орын алады. Ұзын периодикалық осцилляцияларды алу үшін ұсынылған синхрондау сұлбасын қолдану мүмкіндігі туралы қорытынды жасалды.

*Кілт сөздер:* байланысты лазерлер, жылдамдық тендеулері, синхрондау, оптикалық бистабильділік, релаксациялық тербелістер.

A. Mustafin

## **Dynamics of two lasers coupled via mutual cavity-loss modulation**

A mathematical model for synchronization of two single-mode semiconductor lasers is built within the framework of the rate equations approximation. The model has the form of a system of nonlinear ordinary differential equations for electron concentrations and photon densities in both lasers. The lasers are coupled in such a way that the cavity losses of each device are proportional to the light intensity emitted by the other. Besides, the equations take into account the nonlinear (quadratic) losses. The system is analyzed by the methods of bifurcation theory and multiple scale techniques. It is shown that the model exhibits different behavior at strong and weak coupling between the lasers. At strong coupling, there is no oscillation in the system, though the phenomena of bistability and hysteresis are possible. At weak coupling, a stable limit cycle and spiky relaxation oscillations may emerge. It is found that synchronous oscillations of the photon density in lasers occur in antiphase. The proposed synchronization scheme could be useful in obtaining long-period pulsations.

*Keywords:* coupled lasers, rate equations, synchronization, optical bistability, relaxation oscillations.